Exercice 1

1) Dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, (*P*) d'équation $2x+y-3z+1=0$

A le point de coordonnées (1;11;7). Le projeté orthogonal *H* de *A* sur (*P*) est le point d'intersection de la droite *Δ* perpendiculaire à (*P*) passant par *A*.

Les coordonnées de *H* sont donc solutions du système: $\begin{cases} 2x+y-3z+1=0 \\ x-1=2t \\ y-11=t \\ z-7=-3t \end{cases}$

On en tire: $2(2t+1)+(11+t)-3(7-3t)+1=0$, d'où, $t=\dfrac{1}{2}$

Les coordonnées de $H\left(2;\dfrac{23}{2};\dfrac{11}{2}\right)$

La proposition 1 est fausse

2) (*E*) : $y'=2-2y$ *u* la solution de (*E*) sur ℝ vérifiant $u(0)=0$

Les solutions de (*E*) sont les fonctions: $x \mapsto Ce^{-2x}+1$ où $C \in$ ℝ.

Comme $u(0)=0$, $C=-1$. $u(x)=-\mathrm{e}^{-2x}+1$ et $u\left(\dfrac{\ln 2}{2}\right)=-\mathrm{e}^{-\ln 2}+1=-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{1}{2}$.

La proposition 2 est vraie

3) *(u_n)* est définie par $u_0=2$ et, pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1}=\sqrt{7u_n}$.

Par récurrence

Initialisation: $0 \leqslant u_0 \leqslant 7$ est vraie

Hérédité: Soit un entier naturel *n* tel que $0 \leqslant u_n \leqslant 7$, on a alors: $0 \leqslant 7u_n \leqslant 7^2$, puis, $0 \leqslant \sqrt{7u_n} \leqslant 7$, ce qui prouve la double inégalité au rang suivant..

La proposition 3 est vraie

Exercice 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique: 4 cm).

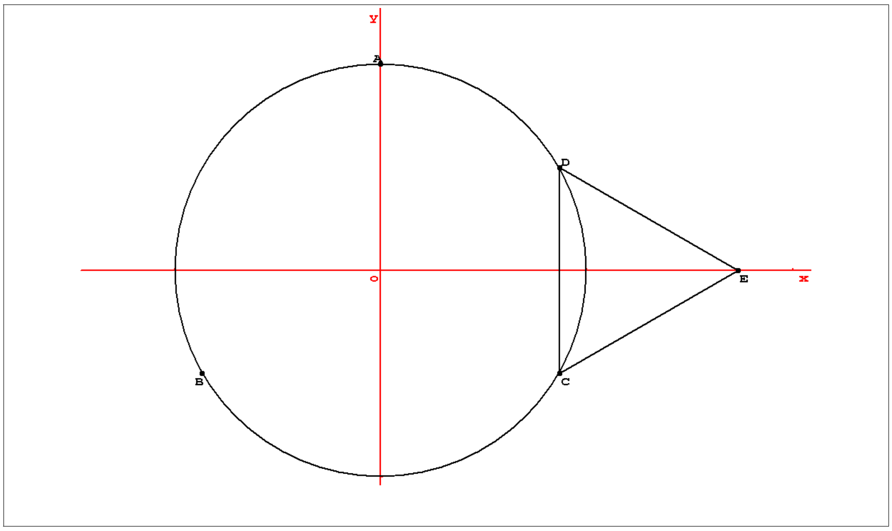
Soit *A* le point d'affixe $z_A=\mathrm{i}$ et *B* le point d'affixe $z_B=\mathrm{e}^{-i5\pi/6}$

1) a) *r* la rotation de centre *O* et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ a pour écriture complexe: $z'=\mathrm{e}^{i2\pi/3}.z$

b) L'image *C* de *B* par *r* a pour affixe: $z_C=\mathrm{e}^{i2\pi/3}.e^{-i5\pi/6}=\mathrm{e}^{-i\pi/6}$

c) $z_B=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ $z_C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

d) Construction ...



2) a) L'affixe du point *D* barycentre de {(*A*;2);(*B*;–1);(*C*;2)} est $z_D=\dfrac{2z_A-z_B+2z_C}{2-1+2}=\dfrac{2\mathrm{i}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}+\sqrt{3}-\mathrm{i}}{3}$

$z_D=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ Remarque: $z_D=\mathrm{e}^{i\pi/6}$

b) $|z_A|=|z_B|=1$, donc, A et B sont sur le cercle de centre O et de rayon 1.
La rotation étant une isométrie $OC=OB=1$, donc, C est sur le cercle de centre O et de rayon 1.
$OD=|z_D|=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1$, donc, D est sur le cercle de centre O et de rayon 1.

3) a) Une écriture complexe de h homothétie de centre A et de rapport 2 est donnée par: $z'-\mathrm{i}=2(z-\mathrm{i})$, $z'=2z-\mathrm{i}$

b) L'affixe de E image de D par h est: $z_E=2z_D-\mathrm{i}=\sqrt{3}$

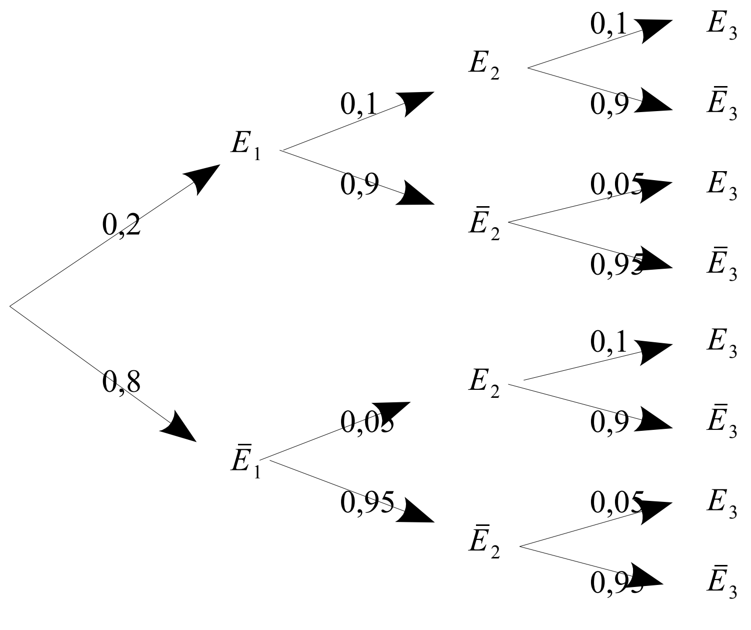
4) a) $\dfrac{z_D-z_C}{z_E-z_C}=\dfrac{\mathrm{i}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{e}^{i\pi/2}}{\mathrm{e}^{i\pi/6}}=\mathrm{e}^{i\pi/3}$

b) D est donc l'image de E par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

CDE est un triangle équilatéral.

Exercice 3

Arbre représentant trois parties successives



$X=$	probabilité
3	$0,2\times 0,1\times 0,1$
2	$0,2\times 0,1\times 0,9$
2	$0,2\times 0,9\times 0,05$
1	$0,2\times 0,9\times 0,95$
2	$0,8\times 0,05\times 0,1$
1	$0,8\times 0,05\times 0,9$
1	$0,8\times 0,95\times 0,05$
0	$0,8\times 0,95\times 0,95$

1) Analyse de l'énoncé: E_1 "le joueur perd la première partie" $P(E_1)=0,2$
E_2 "le joueur perd la deuxième partie": $P_{\bar{E}_1}(E_2)=0,05$ et $P_{E_1}(E_2)=0,1$
E_3 "le joueur perd la troisième partie": $P_{\bar{E}_2}(E_3)=0,05$ et $P_{E_2}(E_3)=0,1$
X est la variable aléatoire qui donne le nombre de parties perdues lors des trois premières parties.
X prend les valeurs 0, 1, 2, 3

b) $P(X=2)=P(E_1\cap E_2\cap\bar{E}_3)+P(E_1\cap\bar{E}_2\cap E_3)+P(E_1\cap E_2\cap\bar{E}_3)$
$P(X=2)=0,2\times 0,1\times 0,9+0,2\times 0,9\times 0,05+0,8\times 0,05\times 0,1=0,031$
$P(X=3)=P(E_1\cap E_2\cap E_3)=0,2\times 0,1\times 0,1=0,002$

c) $P(X=1)=P(E_1\cap\bar{E}_2\cap\bar{E}_3)+P(\bar{E}_1\cap\bar{E}_2\cap E_3)+P(\bar{E}_1\cap E_2\cap\bar{E}_3)$
$P(X=1)=0,2\times 0,9\times 0,95+0,8\times 0,95\times 0,05+0,8\times 0,05\times 0,9=0,245$
$P(X=0)=P(\bar{E}_1\cap\bar{E}_2\cap\bar{E}_3)=0,8\times 0,95\times 0,95=0,722$

d) $E(X)=2\times 0,031+3\times 0,002+1\times 0,245+0\times 0,722=0,313$

2) a) E_n "le joueur perd la n-ième partie" $p_n = P(E_n)$
a) n non nul, $P(E_n \cap E_{n+1}) = 0{,}1 \times p_n$ et $P(\bar{E}_n \cap E_{n+1}) = 0{,}05 \times (1 - p_n)$
b) $p_{n+1} = P(E_{n+1}) = 0{,}1 \times p_n + 0{,}05 \times (1 - p_n) = 0{,}05\, p_n + 0{,}05$

3) a) (u_n) définie par $u_n = p_n - \frac{1}{19}$ vérifie

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{19} = 0{,}05\, p_n + 0{,}05 - \frac{1}{19} = 0{,}05\left(p_n + 1 - \frac{1}{19} \times 20\right) = 0{,}05\left(p_n - \frac{1}{19}\right) = 0{,}05\, u_n$$

(u_n) est donc une suite géométrique de premier terme $u_1 = p_1 - \frac{1}{19} = 0{,}2 - \frac{1}{19} = \frac{14}{95}$ et de raison 0,05
b) il en découle $u_n = u_1 \times (0{,}05)^{n-1}$ puis $p_n = u_n + \frac{1}{19} = \frac{14}{95} \times (0{,}05)^{n-1} + \frac{1}{19}$
c) La raison de la suite géométrique (u_n) étant strictement comprise entre 0 et 1, la suite (u_n) converge vers 0 et la suite (p_n) converge vers $\frac{1}{19}$

Exercice 4
1) R.O.C.
Prérequis:
* la fonction exp est définie et dérivable sur ℝ et $\exp' = \exp$
* $\exp(0) = e^0 = 1$
* pour tout réel x, on a: $e^x > x$
* Si, ϕ et ψ étant définies sur $[A;+\infty[$ ($A \in ℝ^+$), pour tout x de $[A;+\infty[$, $\psi(x) \leqslant \phi(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \psi(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \phi(x) = +\infty$.

a) g définie sur $I = [0;+\infty[$ par $g(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$ est dérivable sur I (somme de deux fonctions dérivables) et sa dérivée $g'(x) = e^x - x$ est strictement positif d'après le 3ème prérequis.
g est donc strictement croissante sur I, et, pour tout réel x de I, $g(x) \geqslant g(0)$.
Or, $g(0) = 1$, donc, $g(x) > 0$ sur I.
b) Pour $x > 0$, on a alors $e^x \geqslant \frac{x^2}{2}$, soit $\frac{e^x}{x} \geqslant \frac{x}{2}$.
Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, d'après le dernier prérequis, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.
2) On appelle f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{4} x e^{-x/2}$ représentée par C dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$
a) Comme la fonction exp est positive sur ℝ, elle est positive sur $[0;+\infty[$ et le produit de nombres positifs est positif.
f est positive sur $[0;+\infty[$
b) Comme $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, la limite en $+\infty$ de $x \times e^{-x} = \frac{x}{e^x}$ est 0, puisque d'après 1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x} = 0$
On a: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{2} e^{-x/2} = \lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x} = 0$ et comme $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{x}{2} \times e^{-x/2}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$
La droite d'équation $y = 0$ (axe des abscisses) est asymptote à C.
c) f, étant le produit de fonctions dérivables sur $I = [0;+\infty[$ est dérivable sur I et $f'(x) = \frac{1}{4} e^{-x/2} + \frac{1}{4} x \times \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-x/2} = \frac{1}{4} e^{-x/2} \left(1 - \frac{1}{2} x\right)$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $2-x$, d'où, f strictement croissante sur [0;2] et strictement décroissante sur $[2;+\infty[$.

f atteint son maximum $f(2)=\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$ en $x=2$ $\qquad f(0)=0$ Tableau de variations ...

3) F définie sur $[0;+\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ (F est la primitive de f qui s'annule en 0)

a) Par définition de F, $F'=f$, donc, F est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
b) Deux méthodes:

*** on calcule la dérivée de ϕ: $x \mapsto 1-\mathrm{e}^{-x/2}-\dfrac{x}{2}e^{-x/2}$ et on montre $\phi'=f$ et $\phi(0)=0$

$\phi'(x)=0+\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x/2}-\dfrac{1}{2}\times\mathrm{e}^{-x/2}-\dfrac{x}{2}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x/2}=\dfrac{1}{4}xe^{-x/2}$ $=f(x)$ et $\phi(0)=1-1+0=0$, donc, $\phi = F$.

*** on fait une intégration par parties

$F(x)=\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^x te^{-t/2}\mathrm{d}t$ $\qquad$ On pose $u(t)=t$ et $v'(t)=\mathrm{e}^{-t/2}$ $\qquad$ d'où, $u'(t)=1$ et $v(t)=-2\mathrm{e}^{-t/2}$

u, v sont des fonctions dérivables et leurs dérivées sont continues sur $[0;+\infty[$, d'où,

$\displaystyle\int_0^x te^{-t/2}\mathrm{d}t = \left[t(-2\mathrm{e}^{-t/2})\right]_0^x$ - $\displaystyle\int_0^x (-2\mathrm{e}^{-t/2})\mathrm{d}t = -2xe^{-x/2}+0+2\left[-2\mathrm{e}^{-t/2}\right]_0^x = -2xe^{-x/2}-4\mathrm{e}^{-x/2}+4$

En multipliant par $\dfrac{1}{4}$, on a: $F(x)=1-\mathrm{e}^{-x/2}-\dfrac{x}{2}\mathrm{e}^{-x/2}$.

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$ = 1 (pas de difficultés cf: 2b)
Tableau de variations ....
d) F est continue sur $[0;+\infty[$, F est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et $F([0;+\infty[)=[0;1[$
Le théorème des valeurs intermédiaires montre que F est une bijection de $[0;+\infty[$ sur [0;1[, donc, 0,5 possède un et un seul antécédent α sur $[0;+\infty[$
Le tableur de la calculatrice donne $F(3{,}35)$ $\approx$ 0,499 à 10^{-3} près par excès et $F(3{,}36)$ $\approx$ 0,5005 à 10^{-4} près par défaut d'où 3,35< α < 3,36
Une valeur approchée de α à 10^{-2} près par défaut est 3,36

4) n est un entier naturel non nul. A_n est définie par $A_n = \displaystyle\int_0^n f(t)\mathrm{d}t = F(n)$ car f est positive sur $[0;n]$.

D'après la question précédente, il faut $n\geqslant\alpha$ pour assurer $F(n)\geqslant 0{,}5$. Le plus petit entier n tel que $A_n\geqslant 0{,}5$ est donc 4.

Exercice 2 (spécialité maths)
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique: 1 cm).
A d'affixe $a=3+5\mathrm{i}$, B d'affixe $b=-4+2\mathrm{i}$ et C d'affixe $c=1+4\mathrm{i}$
f associe à tout point $M(z)$ le point $M'(z')$ tel que $z'=(2-2\mathrm{i})z+1$

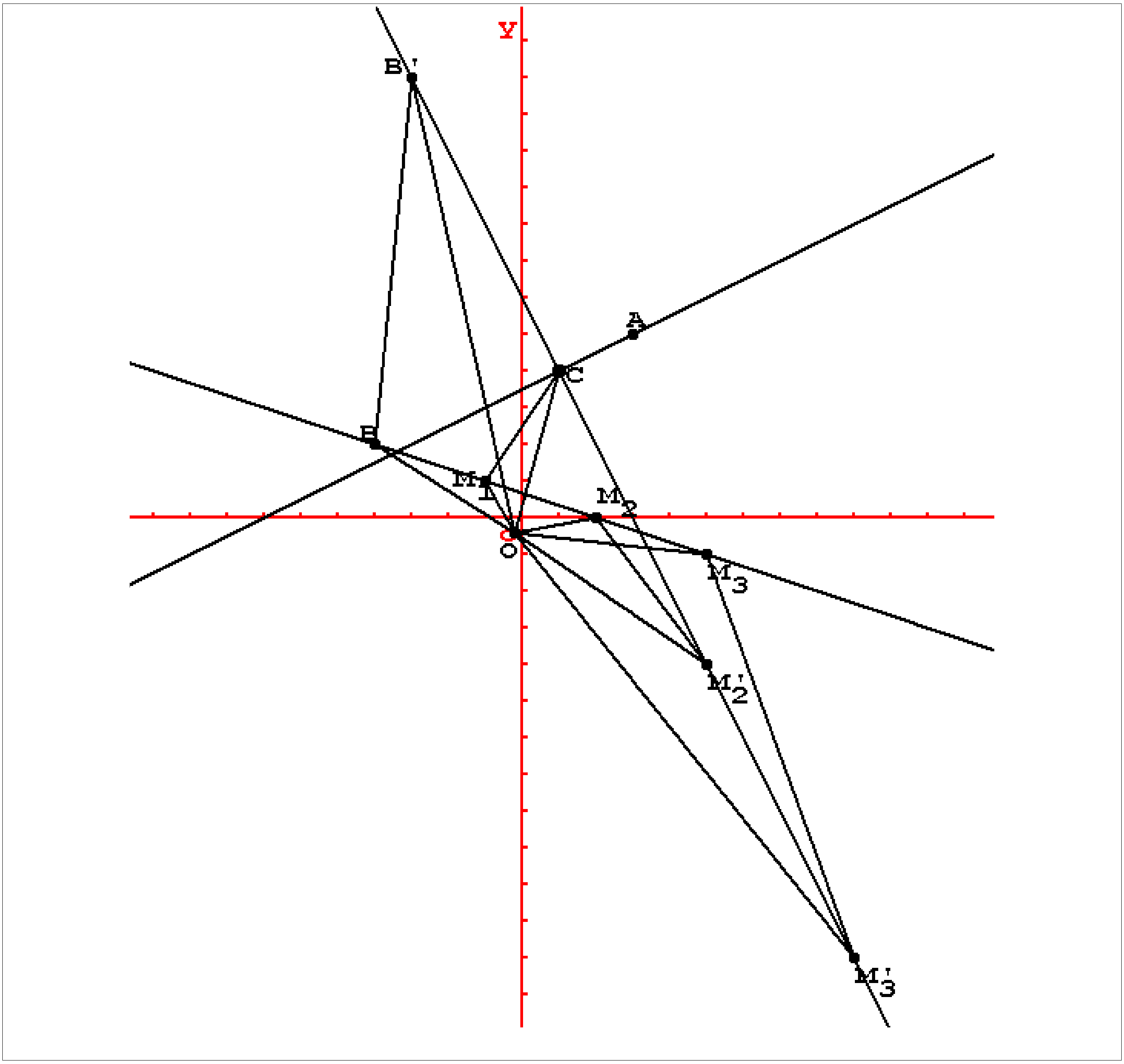
1) f est une similitude directe de rapport $|2-2\mathrm{i}|=2\sqrt{2}$, d'angle $\arg(2-2\mathrm{i})=-\dfrac{\pi}{4}$ et de centre le point Ω d'affixe ω solution de $z=(2-2\mathrm{i})z+1$, soit: $z=\dfrac{1}{-1+2\mathrm{i}}=\dfrac{-1-2\mathrm{i}}{5}$. $\omega=-\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}\mathrm{i}$

2) a) L'affixe b' de $B'=f(B)$ est $b'=(2-2\mathrm{i})(-4+2\mathrm{i})+1=-3+12\mathrm{i}$

b) $\overrightarrow{CB'}$ a pour affixe $-3+12\mathrm{i}-(1+4\mathrm{i})=-4+8\mathrm{i}$ et $\overrightarrow{CA}$ a pour affixe $3+5\mathrm{i}-(1+4\mathrm{i})=2+\mathrm{i}$
Produit scalaire: $-4\times 2+8\times 1=0$ donc les vecteurs sont orthogonaux
ou bien $\dfrac{-4+8\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=\dfrac{-4(1-2\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{5}=4\mathrm{i}$ est un imaginaire pur, d'où, $(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB'})=\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

3) M d'affixe $z=x+iy$ (x et y entiers relatifs)
$M'=f(M)$ d'affixe $z'=(2-2\mathrm{i})(x+iy)+1=2x+2y+1+2(y-x)\mathrm{i}$
$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CM'}\begin{pmatrix}2x+2y\\2y-2x-4\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{CM'}\cdot\overrightarrow{CA}=0$ si et seulement si
$2(2x+2y)+1.(2y-2x-4)=0$ si et seulement si $x+3y-2=0$
(Équation d'une droite dans le plan)

4) a) Les coordonnées de B' sont solutions de (E): $x+3y=2$ d'après le 2b)
b) On a alors: $x+3y=-4+3\times 2$ si et seulement si $x+4=3(2-y)$ si et seulement si $\begin{cases}x+4=3k\\2-y=k\end{cases}$ $k\in\mathbb{Z}$.
L'ensemble des solutions est l'ensemble des couples d'entiers $(-4+3k\,;2-k)$ où $k\in\mathbb{Z}$.
c) L'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers de $[-5;5]$ est:
$$\begin{cases}-5\leqslant -4+3k\leqslant 5\\-5\leqslant 2-k\leqslant 5\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}-\dfrac{1}{3}\leqslant k\leqslant 3\\-3\leqslant k\leqslant 7\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}\ \Leftrightarrow\ 0\leqslant k\leqslant 3\quad k\in\mathbb{Z}$$
$k=0$ ou $k=1$ ou $k=2$ ou $k=3$
$M_0(-4;2)$ $M_1(-1;1)$ $M_2(2;0)$ $M_3(5;-1)$
Remarque: $M_0=B$ $f(M_1)=C$


y
B'
A
C
B
M1
M2
O
M3
M'2
M'3