Amérique du Nord juin 2004

Exercice 1 Amérique du Nord 2004

	Affirmation	Vrai ou Faux
(A1)	G_1 est le milieu du segment [*CI*]	**Vraie**
(A2)	G_1 est barycentre de $\left\{(J\,;2);\left(C\,;\frac{2}{3}\right)\right\}$	**Vraie**
(A3)	Pour tout point *M*, $\vec{V_M}=\vec{AB}+2\vec{AC}$	**Fausse**
(A4)	Pour tout réel *m*, différent de $-\frac{1}{3}$, $\vec{AG_m}$ est colinéaire à $\vec{AG_{-1}}$	**Vraie**
(A5)	$IBG_{-\frac{1}{2}}$ est un triangle rectangle	**Vraie**
(A6)	Pour tout point *P* de (AG_{-1}) , il existe un réel *m* tel que $P=G_m$	**Fausse**

(A1) Par associativité, on a: $G_1=bar\{(A\,;1);(B\,;1);(C\,;2)\}$ = bar $\{(I\,;2);(C\,;2)\}$

(A2) $G_1=bar\{(A\,;1);(B\,;1);(C\,;2)\}$

d'où, $G_1=bar\{(A\,;1);(B\,;1);(C\,;1);(C\,;1)\}$ = bar $\{(J\,;3);(C\,;1)\}$

On ne change pas le barycentre en multipliant les coefficients par $\frac{2}{3}$

(A3) $\vec{V_M}=3\vec{MA}-\vec{MB}-2\vec{MC}$ = $3\vec{MA}-(\vec{MA}+\vec{AB})-2(\vec{MA}+\vec{AC})$ = $-(\vec{AB}+2\vec{AC})$

(A4) Pour tout *m* réel distinct de $-\frac{1}{3}$ et pour tout point *M* du plan, on a:

$(1+m+2\mathrm{m})\vec{MG_m}=\vec{MA}+m\vec{MB}+2\mathrm{m}\vec{MC}$ (1)

Si $M=A$, on a: $(1+m+2\mathrm{m})\vec{AG_m}=m\vec{AB}+2\mathrm{m}\vec{AC}=m(\vec{AB}+2\vec{AC})$

Si $m=-1$, on a: $(-2)\vec{AG_{-1}}=-\vec{AB}-2\vec{AC}=-(\vec{AB}+2\vec{AC})$

Finalement: $(1+3\mathrm{m})\vec{AG_m}=2\mathrm{m}\vec{AG_{-1}}$ (2)

(A5) En faisant $M=B$ et $m=\frac{-1}{2}$ dans la relation (1) de (A4), on obtient: $\left(\frac{-1}{2}\right)\vec{BG_{-\frac{1}{2}}}=\vec{BA}-\vec{BC}=\vec{CA}$

Les droites $(BG_{-\frac{1}{2}})$ et *(AC)* sont donc parallèles et comme $(AC)\perp(AB)$, on obtient: $(BG_{-\frac{1}{2}})\perp(AB)$

Comme $I\in(AB)$, le triangle $IBG_{-\frac{1}{2}}$ est rectangle en *B*.

(A6) Soit *P* un point de (AG_{-1}) . Il existe un réel *k* tel que $\vec{AP}=k\vec{AG_{-1}}$

D'après la relation (2) de (A4), on cherche *m* distinct de $\frac{-1}{3}$ tel que $k=\frac{2\mathrm{m}}{1+3\mathrm{m}}$

On en tire: $k(1+3\mathrm{m})=2\mathrm{m}$, puis, $m(2-3\mathrm{k})=k$

Si $k=\frac{2}{3}$, il n'y a pas de solution.

Il existe un point P de (AG_{-1}) qui n'est pas un des points G_m de l'énoncé: le point P défini par $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AG_{-1}}$

Exercice 3 Amérique du Nord juin 2004

1) a) Loi de probabilité de X

X peut prendre les valeurs: 8 ; 5 ; 0 et $-a$

Dans l'hypothèse d'équiprobabilité, on a: $P(X=8)=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$ car, il y a deux cases rouges sur 30 cases.

$P(X=5)=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$ car, il y a quatre cases vertes sur 30 cases.

$P(X=0)=\frac{6}{30}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$ car, il y a six cases jaunes sur 30 cases.

$P(X=-a)=\frac{18}{30}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$ car, il y a dix-huit cases blanches sur 30 cases.

b) $E(X)=8\times\frac{1}{15}+5\times\frac{2}{15}+0\times\frac{3}{15}-a\times\frac{9}{15}=\frac{18-9a}{15}=\frac{6-3\text{a}}{5}$ $\qquad$ $E(X)=0$ lorsque $a=2$

2) a) Un joueur est gagnant lorsque $(X=8)$ ou $(X=5)$. $p=P(X=8)+P(X=5)=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$

b) Les parties étant indépendantes, la variable aléatoire Y donnant le nombre de parties gagnantes suit la loi binomiale $B\left(5;\frac{1}{5}\right)$

$P(Y=2)=\binom{5}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^3=10\times\frac{64}{5^5}=\frac{128}{5^4}=\frac{128}{625}$ $\qquad$ $P(Y=5)=\left(\frac{1}{5}\right)^5=\frac{1}{3125}$

c) Le nombre moyen de parties gagnantes est $E(Y)=5\times\frac{1}{5}=1$

Exercice 4 Amérique du Nord juin 2004

PARTIE A

n entier naturel strictement positif: (E_n): $\quad y'+y=\frac{x^n}{n!}\text{e}^{-x}$

1) g et h sont deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout x réel, $g(x)=h(x)\text{e}^{-x}$

a) Démonstration de l'équivalence: $(\text{i})\quad g\ \textit{est solution de}\,(E_n)$

$$(\text{ii})\quad \textit{pour tout } x \textit{ réel, } h'(x)=\frac{x^n}{n!}$$

$(\text{i})\Rightarrow(\text{ii})$ Puisque g est solution de (E_n) , on a: pour tout x réel, $g'(x)+g(x)=\frac{x^n}{n!}\text{e}^{-x}$

Or, $g'(x)=h'(x)\text{e}^{-x}-h(x)\text{e}^{-x}$. On a alors: $h'(x)\text{e}^{-x}-h(x)\text{e}^{-x}+h(x)\text{e}^{-x}=\frac{x^n}{n!}\text{e}^{-x}$. Comme $\text{e}^{-x}\neq 0$, on obtient: $h'(x)=\frac{x^n}{n!}$

$(\text{ii})\Rightarrow(\text{i})$ $\quad$ *pour tout x réel,* $h'(x)=\frac{x^n}{n!}$, d'où, comme $g'(x)=h'(x)\text{e}^{-x}-h(x)\text{e}^{-x}$, on a:

$g'(x)=\frac{x^n}{n!}e^{-x}-g(x)$. g est bien solution de (E_n)

b) Une primitive de $x\mapsto x^n$ est $x\mapsto\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$ avec $C\in\mathbb{R}$

On a donc: $h(x)=\frac{1}{n!}\times\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C=\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}+C$. Comme $h(0)=0$, $h(x)=\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}$

et $g(x)=\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}e^{-x}$

2) ϕ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

a) Démonstration de l'équivalence: (i) ϕ *est solution de* (E_n)

(ii) $\phi-g$ *est solution de* (F): $y'+y=0$

$(\mathrm{i})\Rightarrow(\mathrm{ii})$ Puisque ϕ et g est solution de (E_n) , on a: pour tout x réel, $\phi'(x)+\phi(x)=\frac{x^n}{n!}e^{-x}$ et $g'(x)+g(x)=\frac{x^n}{n!}e^{-x}$. Par différence, il vient: $\phi'(x)-g'(x)+\phi(x)-g(x)=0$.

Comme $(\phi-g)'=\phi'-g'$, on a bien: $\phi-g$ solution de (F)

$(\mathrm{ii})\Rightarrow(\mathrm{i})$ On a: Pour tout x réel, $(\phi'-g')(x)+(\phi-g)(x)=0$, d'où, $\phi'(x)-g'(x)+\phi(x)-g(x)=0$

Comme $g'(x)+g(x)=\frac{x^n}{n!}e^{-x}$, on en déduit: $\phi'(x)+\phi(x)=\frac{x^n}{n!}e^{-x}$ et par conséquent ϕ *est solution de* (E_n)

b) Les solutions de (F) sont les fonctions $x\mapsto K e^{-x}$ où $K\in\mathbb{R}$

c) D'après 2a) et 1b), la solution générale de (E_n) est: $\phi: x\mapsto K e^{-x}+\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}e^{-x}$

d) La solution de (E_n) vérifiant $f(0)=0$ est obtenue lorsque $K e^0=0$, d'où, $K=0$. $f=g$

PARTIE B

1) $f_0(x)=e^{-x}, f_1(x)=x e^{-x}$

a) $f'_1(x)=1\cdot e^{-x}+x\cdot(-e^{-x})$, d'où, $f'_1+f_1=f_0$

b) n entier strictement positif, Soit P(n) la propriété: f_n la solution de $y'+y=f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0)=0$ est $f_n(x)=\frac{x^n}{n!}e^{-x}$

Initialisation $n=1$, $f'_1+f_1=f_0$ et $f_1(x)=\frac{x^1}{1!}e^{-x}$ montré au **B-1 a)** et $f_1(0)=0$ P(1) vérifiée

Hérédité: (Hypothèse de récurrence). Soit un entier $n\geqslant1$ tel que $f_n(x)=\frac{x^n}{n!}e^{-x}$ (et $f_n(0)=0$)

D'après la **partie A**, la solution de $y'+y=f_n$ qui **s'annule en 0** est $g(x)=\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}e^{-x}=f_{n+1}(x)$

Conclusion: D'après l'axiome de récurrence, pour tout entier $n\geqslant1$, $f_n(x)=\frac{x^n}{n!}e^{-x}$

2) $I_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx$

a) $0\leqslant x\leqslant1\Rightarrow-1\leqslant-x\leqslant0\Rightarrow\frac{1}{e}\leqslant e^{-x}\leqslant1$. Comme $\frac{x^n}{n!}\geqslant0$, on en déduit: $0\leqslant f_n(x)\leqslant\frac{x^n}{n!}$

puis, $0\leqslant I_n\leqslant\frac{1}{(n+1)!}$ d'après la positivité de l'intégrale et une primitive de $x\mapsto\frac{x^n}{n!}$ est $x\mapsto\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}$

Comme $\dfrac{1}{(n+1)!}$ converge vers 0, le théorème des gendarmes permet de conclure que la suite (I_n) converge vers 0.

b) k est un entier naturel non nul. D'après 1 b), $f_k - f_{k-1} = -f'_k$

Par linéarité de l'intégrale: $I_k - I_{k-1} = \int_0^1 (f_k(x) - f_{k-1}(x))\,dx = \int_0^1 (-f'_k(x))\,dx = -f_k(1) + f_k(0) = -\dfrac{1}{k!}\mathrm{e}^{-1}$

Autre méthode:

Une I.p.p de I_k avec $u(x) = \dfrac{x^k}{k!}$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{-x}$ donne $I_k = \left[\dfrac{x^k}{k!} \times (-\mathrm{e}^{-x})\right]_0^1 - \int_0^1 \left(\dfrac{x^{k-1}}{(k-1)!} \times (-\mathrm{e}^{-x})\right) dx$

$I_k = -\dfrac{e^{-1}}{k!} - 0 + I_{k-1}$ ce qui prouve le résultat demandé.

c) $I_0 = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = \dfrac{-1}{e} + 1$

on a: $\begin{cases} I_1 - I_0 = -\dfrac{1}{1!}\mathrm{e}^{-1} \\ I_2 - I_1 = -\dfrac{1}{2!}\mathrm{e}^{-1} \\ \ldots \\ I_n - I_{n-1} = -\dfrac{1}{n!}\mathrm{e}^{-1} \end{cases}$ En faisant la somme membre-à-membre, on obtient:

$I_n - I_0 = -\dfrac{1}{1!}\mathrm{e}^{-1} - \dfrac{1}{2!}\mathrm{e}^{-1} - \ldots - \dfrac{1}{n!}\mathrm{e}^{-1} = -\sum_1^n \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}$

Comme $I_0 = 1 - \mathrm{e}^{-1}$ et que 0!=1, on a: $I_n = 1 - \sum_0^n \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}$

d) Comme la suite (I_n) converge vers 0, $\sum_0^n \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}$ converge vers 1.

En multipliant par e, on obtient: $\sum_0^n \dfrac{1}{k!}$ converge vers e

Remarque à propos du c):

Il y a deux méthodes à remarquer (et retenir) que vous avez découvertes lors de l'étude de suite arithmétique et de suite géométrique.

Pour suite arithmétique: $u_n = u_{n-1} + r$ ou encore $u_n - u_{n-1} = r$

Comme $u_n = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \ldots + (u_1 - u_0) + u_0$ alors $u_n = nr + u_0$

Pour une suite géométrique: $u_n = u_{n-1} \times q$ ou encore $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} = q$ (Tous les $u_n \neq 0$)

Comme $u_n = \left(\dfrac{u_n}{u_{n-1}}\right) \times \left(\dfrac{u_{(n-1)}}{u_{n-2}}\right) \times \ldots \times \left(\dfrac{u_1}{u_0}\right) \times u_0$ alors $u_n = q^n \times u_0$

la disposition en colonne (voir c) est très commode