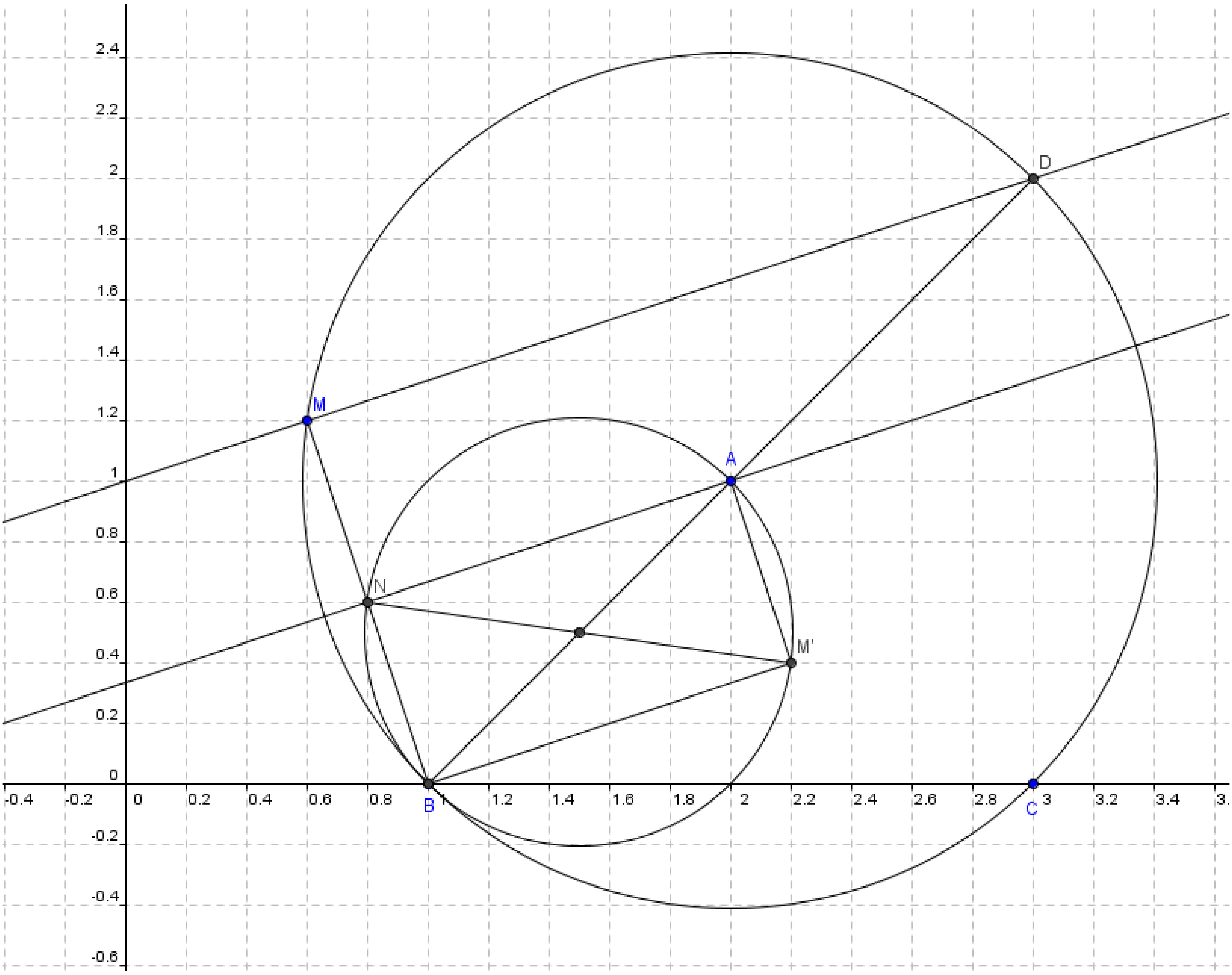
Table des matières

EXERCICE 1 5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ unité graphique : 4 cm.

On considère le point A d'affixe $z_A = 2 + \mathrm{i}$ et le cercle (Γ) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

1. Faire une figure qui sera complétée tout au long de l'exercice.



2. a. Déterminer les affixes des points d'intersection de (Γ) et de l'axe $(O, \vec{u})$.

Une équation de (Γ) est $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$.

Les abscisses des points d'intersection de (Γ) et de l'axe $(O, \vec{u})$ sont les solutions du système:

$\begin{cases} y=0 \\ (x-2)^2+(y-1)^2=2 \end{cases}$ Ce qui donne: $x^2 - 4x + 3 = 0$. $x = 1$ ou $x = 3$

b. On désigne par *B* et *C* les points d'affixes respectives $z_B = 1$ et $z_C = 3$.

Déterminer l'affixe z_D du point *D* diamétralement opposé au point *B* sur le cercle (*Γ*).

Le point *D* est défini par *A* est le milieu de [*BD*], soit: $z_A = \frac{z_B + z_D}{2}$, d'où, $z_D = 2(2 + \mathrm{i}) - 1 = 3 + 2\mathrm{i}$

3. Soit *M* le point d'affixe $\frac{3}{5} + \frac{6}{5}\mathrm{i}$.

a. Calculer le nombre complexe $\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$.

$$\frac{3+2\mathrm{i}-\left(\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i\right)}{1-\left(\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i\right)} = \frac{12-4\mathrm{i}}{2-6\mathrm{i}} = \frac{2\mathrm{i}(2-6\mathrm{i})}{2-6\mathrm{i}} = 2\mathrm{i}$$

b. Interpréter géométriquement un argument du nombre $\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$; en déduire que le point *M* appartient au cercle (*Γ*).

$$\arg \frac{z_D - z_M}{z_B - z_M} = \arg(z_D - z_M) - \arg(z_B - z_M) = (\vec{u}, \overrightarrow{DM}) - (\vec{u}, \overrightarrow{BM}) = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{DM}) \quad [2\pi]$$

Or, $\arg(2\mathrm{i}) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

On en déduit que $\overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{DM}$. Le triangle *BDM* étant rectangle en *M* et ayant pour hypoténuse le diamètre [*BD*] de (*Γ*) est inscrit dans (*Γ*).

M appartient au cercle (*Γ*).

4. On note (*Γ'*) le cercle de diamètre [*AB*].

La droite (*BM*) recoupe le cercle (*Γ'*) en un point *N*.

a. Montrer que les droites (*DM*) et (*AN*) sont parallèles.

Par construction de *N* le triangle *ABN* est rectangle en *N*. (On a l'alignement des points *B*, *M*, *N* et *B*, *A*, *D*)

On a donc: (*BN*) ⊥ (*AN*) et comme (*BN*) ⊥ (*DM*), les droites (*DM*) et (*AN*) sont parallèles.

b. Déterminer l'affixe du point *N*.

La droite passant par *A* milieu de [*BD*] et parallèle à [*DM*] coupe [*BM*] en son milieu *N*, d'où, $z_N = \frac{z_B + z_M}{2}$

$z_N = \ldots = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}\mathrm{i}$

5. On désigne par *M'* l'image du point *M* par la rotation de centre *B* et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

a. Déterminer l'affixe du point M'.

Le quart de tour indirect de centre B a pour écriture complexe: $z' - z_B = -\mathrm{i}(z - z_B)$, d'où,

$$z_{M'} = -i\left(\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i-1\right) + 1 = ... = \frac{11}{5} + \frac{2}{5}\mathrm{i}$$

b. Montrer que le point M' appartient au cercle (Γ').

Par exemple: $\dfrac{z_{M'}+z_N}{2} = ... = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ et $\dfrac{z_A+z_B}{2} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ (centre du cercle (Γ'))

Le quadrilatère $AM'BN$ est un parallélogramme, et, comme l'angle $\widehat{BNA}$ est droit, ce parallélogramme est un rectangle ...

EXERCICE 2 5 points Enseignement obligatoire

Partie A

On considère deux points A et D de l'espace et on désigne par I le milieu du segment $[AD]$.

1. Démontrer que, pour tout point M de l'espace, $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MA} = MI^2 - IA^2$.

On sait: I étant le milieu du segment $[AD]$, $\overrightarrow{ID} = -\overrightarrow{IA}$

$$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MA} = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID})\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}) = (\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}) = \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = MI^2 - IA^2 .$$

2. En déduire l'ensemble (E) des points M de l'espace, tels que $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MA} = 0$.

$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MA} = 0 \Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = 0 \Leftrightarrow MI^2 = IA^2 \Leftrightarrow MI = IA$ (car réels positifs)

(E) est la sphère de centre I et de rayon IA.

Partie B :

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives : $A(3 ; 0 ; 0)$, $B(0 ; 6 ; 0)$, $C(0 ; 0 ; 4)$ et $D(-5 ; 0 ; 1)$.

1. a. Vérifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

On a: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\6\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = ... = 0$, d'où, $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$

et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\0\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = ... = 0$, d'où, $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$

Comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABC).

b. Déterminer une équation du plan (ABC).

Par conséquent: pour tout $M(x; y; z) \in (ABC)$, on a: $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$

soit: $4(x-3)+2(y-0)+3(z-0)=0$

Une équation du plan (ABC) est $4x+2y+3z-12=0$.

2. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ, orthogonale au plan (ABC) passant par D.

pour tout $M(x;y;z)\in(\Delta)$, il existe un réel t tel que $\overrightarrow{DM}=t\ \vec{n}$.

On a donc: $\begin{cases} x-(-5)=4t \\ y-0=2t \\ z-1=3t \end{cases}$, soit, $\begin{cases} x=-5+4t \\ y=2t \\ z=1+3t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite Δ.

b. En déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).

Le point $H\in(\Delta)$, d'où, $\begin{cases} x_H=-5+4t \\ y_H=2t \\ z_H=1+3t \end{cases}$ et à (ABC), d'où, $4(-5+4t)+2\times 2t+3(1+3t)-12=0$

On en déduit $29t=29$. H est le point de (Δ) de paramètre 1.

$H(-1;2;4)$

c. Calculer la distance du point D au plan (ABC).

On calcule $DH=\sqrt{(-1-(-5))^2+(2-0)^2+(4-1)^2}=\sqrt{29}$

d. Démontrer que le point H appartient l'ensemble (E) défini dans la partie A.

Il suffit de montrer que $\overrightarrow{HD}\cdot\overrightarrow{HA}=0$

$\overrightarrow{HD}\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HA}\begin{pmatrix}-4\\2\\4\end{pmatrix}$, et, $4\times(-4)+2\times 2+3\times 4=0$ ....

EXERCICE 2 5 points Enseignement de spécialité

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On nomme (S) la surface d'équation $x^2+y^2-z^2=1$.

Remarque: (S) est un cône tronqué. Imaginer un cône où on coupe le bout pointu de sorte d'avoir un cercle de rayon 1 ...

1. Montrer que la surface (S) est symétrique par rapport au plan (xOy).

Le symétrique de $M(x;y;z)$ par rapport au plan (xOy) est le point $M'(x,y,-z)$.

et on a l'équivalence suivante: $x^2+y^2-z^2=1\Leftrightarrow x^2+y^2-(-z)^2=1$.

2. On nomme A et B les points de coordonnées respectives (3 ; 1 ; −3) et (−1 ; 1 ; 1).

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par les points A et B.

pour tout $M(x; y; z) \in (D)$, il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\ \overrightarrow{AB}$. Comme $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

On a, $\begin{cases} x = 3-4t \\ y = 1 \\ z = -3+4\mathrm{t} \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite (D).

b. Démontrer que la droite (D) est incluse dans la surface (S).

Pour tout t réel, $(3-4t)^2 + 1^2 - (-3+4t)^2 = 1$. (Remarquer: $3 - 4t$ et $-3 + 4t$ sont opposés, d'où, ...)

Tout point de (D) a ses coordonnées qui vérifient l'équation de (S), ...

3. Déterminer la nature de la section de la surface (S) par un plan parallèle au plan (xOy).

Soit $z = k$ une équation d'un plan (P) parallèle à (xOy).

On a alors: $M \in (P) \cap (S) \Leftrightarrow \begin{cases} z = k \\ x^2 + y^2 = k^2 + 1 \end{cases}$

Posons $\Omega(0; 0; k)$.

La section de (S) par (P) est le cercle de centre Ω est de rayon $\sqrt{k^2+1}$ dans le plan (P).

4. a. On considère la courbe (C), intersection de la surface (S) et du plan d'équation $z = 68$. Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe.

(C) est donc le cercle de centre $\Omega(0; 0; 68)$ et de rayon $r = \sqrt{68^2+1} = \sqrt{4625} = 5\times\sqrt{185}$ dans le plan d'équation $z = 68$.

b. M étant un point de (C), on désigne par a son abscisse et par b son ordonnée.

On se propose de montrer qu'il existe un seul point M de (C) tel que a et b soient de entiers naturels vérifiant $a < b$ et ppcm(a ; b)= 440, c'est-à-dire tel que (a, b) soit solution du système

(1) : $\begin{cases} a < b \\ a^2 + b^2 = 4625 \\ ppcm(a\,; b) = 440 \end{cases}$

Montrer que si (a, b) est solution de (1) alors pgcd(a ; b) est égal à 1 ou 5.

Conclure

Dans cette question toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative,même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

Appelons g = pgcd(a; b) et m = ppcm(a; b)

On a les égalités suivantes: $a = ga'$, $b = gb'$ avec a' et b' premiers entre eux, $g\times m = ab$

On en tire : $(ga')^2 + (gb')^2 = 4625$, d'où, $g^2\,(a'^2 + b'^2) = 4625 = 25\times185 = 5^2 \times 5\times 37$

On doit avoir: $g^2 = 1$ ou $g^2 = 25$. $g = 1$ ou $g = 5$

Remarquer et savoir:

Quand on connaît la somme S et le produit P de deux nombres inconnues α et β, la résolution du système mène à l'équation du second degré: $x^2 - Sx + P = 0$

En effet: $\begin{cases} \alpha+\beta=S \\ \alpha\times\beta=P \end{cases}$ *mène à $\alpha(S-\alpha) = P$ ...*

Si $g = 1$, on a: $ab = 440$, ce qui mène au système $\begin{cases} a^2+b^2=4625 \\ a^2 b^2=440^2 \end{cases}$

a^2 et b^2 sont donc les solutions de l'équation du second degré: $x^2 - 4625x + 440^2 = 0$

Le discriminant: $\Delta = 4625^2 - 4\times440^2 = (4625 - 2\times440)(4625 + 2\times440) = 3745\times5505 = 5\times7\times107\times5\times3\times367$ où 107 et 367 sont premiers. Δ n'étant pas un carré d'entier, on ne peut pas avoir $g = 1$

Si $g = 5$, on a: $a'b' = \dfrac{440}{5} = 88$ et $a'^2 + b'^2 = \dfrac{4625}{25} = 185$

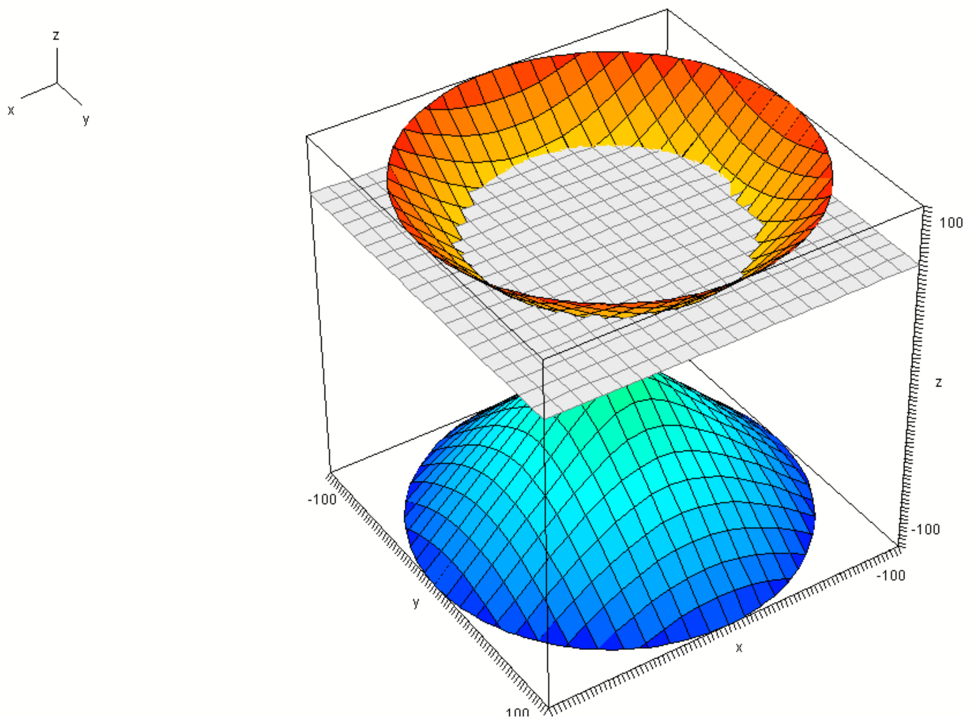
ce qui mène au système: $\begin{cases} a'^2+b'^2=185 \\ a'^2 b'^2=88^2 \end{cases}$ avec $a' < b'$.

a'^2 et b'^2 sont donc les solutions de l'équation du second degré: $x^2 - 185x + 88^2 = 0$

Le discriminant: $\Delta = 185^2 - 4\times88^2 = (185 - 2\times88)(185 + 2\times88) = 9\times361 = 3^2\times19^2$

On en déduit: a'^2 = {-(-185)-3*19}/{2} = ... = 64 et b'^2 = {-(-185)+3*19}/{2} = ... = 121

$a' = 8$ et $b' = 11$
Conclusion: il existe un couple unique (a; b) vérifiant les conditions imposées.
Ce couple est (40; 45)



EXERCICE 3 6 points   Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$ par $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{\ln x}$.

On nomme (C) la courbe représentative de f et Γ la courbe d'équation y = ln$x$ dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Étudier les variations de la fonction f et préciser les limites en 1 et en $+\infty$.

Si $x > 1$ alors $\ln x > 0$ et f est bien définie et dérivable sur $]1; +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{-\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{(\ln x)^2+1}{x(\ln x)^2}$$

Il en résulte $f'(x) > 0$ sur $]1; +\infty[$ et par conséquent, f est strictement croissante sur cet intervalle.

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \ln(x) = 0^+$, d'où, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{1}{\ln(x)} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. *(aucune difficulté)*

2. a. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - \ln x]$. Interpréter graphiquement cette limite.

$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - \ln x] = 0$ *(aucune difficulté)*

Les courbes (C) et Γ sont asymptotes en $+\infty$.

b. Préciser les positions relatives de (C) et de Γ.

La position relative est donné par le signe de $d(x) = f(x) - \ln(x) = -\dfrac{1}{\ln x}$

qui est strictement négatif sur $]1; +\infty[$

(C) est au-dessous de Γ.

3. On se propose de chercher les tangentes à la courbe (C) passant par le point O.

a. Soit a un réel appartenant à l'intervalle $]1 ; +\infty[$.

Démontrer que la tangente T_a à (C) au point d'abscisse a passe par l'origine du repère

si et seulement si $f(a) - a f'(a) = 0$.

Une équation de (T) est: $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

$O \in T_a$ si et seulement si $0 = f'(a)(0 - a) + f(a)$ CQFD

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x f'(x)$.

b. Montrer que sur $]1 ; +\infty[$, les équations $g(x) = 0$ et $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$ ont les mêmes solutions.

$g(x) = \ln x - \dfrac{1}{\ln x} - x\dfrac{(\ln x)^2+1}{x(\ln x)^2}$ pour $x > 1$.

$g(x) = \dfrac{(\ln x)^3 - \ln x - ((\ln x)^2+1)}{(\ln x)^2}$.

$g(x) = 0$ si et seulement si $x > 1$ et $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$

c. Après avoir étudié les variations de la fonction u définie sur ℝ par $u(t) = t^3 - t^2 - t - 1$ montrer que la fonction u s'annule une fois et une seule sur ℝ.

u est un polynôme défini et dérivable sur ℝ.
$u'(t) = 3t^2 - 2t - 1 = (t-1)(3t+1)$, d'où le tableau de variations suivant:

t	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$u'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
u	$-\infty$	↗	$u\left(-\frac{1}{3}\right)$	↘	$u(1)$	↗	$+\infty$

$u\left(-\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{1}{27} - \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{3} - 1 = \dfrac{-1-3+9-27}{27} = -\dfrac{22}{27}$

$u(1) = 1 - 1 - 1 - 1 = -2$

Sur $]-\infty; 1]$, u a un maximum strictement négatif en $-\dfrac{1}{3}$, d'où, u ne s'annule pas sur cet intervalle.

Sur $[1; +\infty[$, u est continue (polynôme) et strictement croissante, donc, u réalise une bijection de $[1; +\infty[$ sur $[u(1); +\infty[$.
Comme $u(1) = -4$, $0 \in\ ]u(1); +\infty[$, d'où, il existe un et un seul réel $\alpha > 1$ tel que $u(\alpha) = 0$
La calculatrice donne $\alpha \approx 1{,}84$
d. En déduire l'existence d'une tangente unique à la courbe (C) passant par le point O.

En posant $t = \ln x$ et $a = e^{\alpha}$

D'après 3b) a est donc l'unique solution de $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$, donc, de $g(x) = 0$.

Une valeur approchée de $a \approx e^{1,84} \approx 6{,}3$

La courbe (C) et la courbe Γ sont données en annexe.

Tracer cette tangente le plus précisément possible sur cette figure. (En bleu sur le graphique)

4. On considère un réel m et l'équation $f(x) = mx$ d'inconnue x.

Par lecture graphique et sans justification, donner, suivant les valeurs du réel m, le nombre de solutions de cette équation appartenant à l'intervalle]l ; 10].

On trace la droite Δ d'équation $y = mx$ m est le coefficient directeur de la droite.

Lorsque la droite Δ est sécante à C_f en un point d'abscisse b, on a: $m = \dfrac{f(b)}{b}$.

Les solutions étant sur]1; 10], tracer la droite passant par le point de coordonnées $(10; f(10))$ (en vert sur le graphique)

Si $m \leqslant 0$, la droite Δ coupe C_f en un point, d'où, une solution à l'équation $f(x) = mx$.

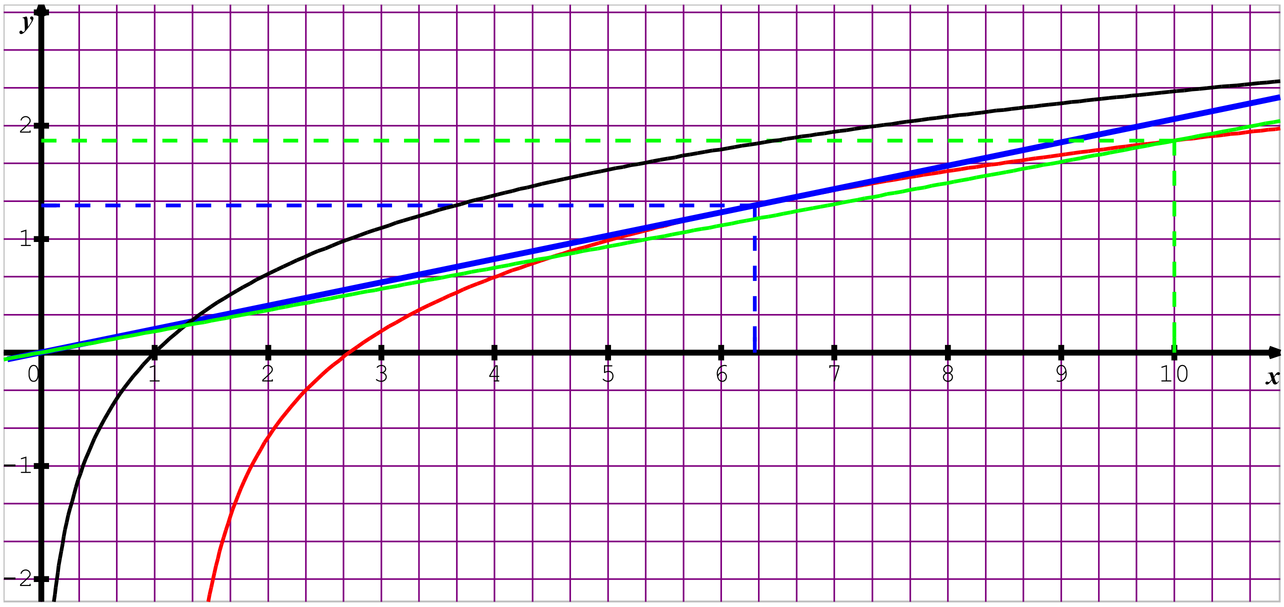
$\dfrac{f(10)}{10} \leqslant m < f'(a)$, la droite Δ coupe C_f en deux points, d'où, deux solutions à l'équation $f(x) = mx$.

Si $m = f'(a)$, on a une solution unique (abscisse a du point de tangence) à l'équation $f(x) = mx$.

Si $m > f'(a)$, la droite ne coupe pas C_f. L'équation n'a pas de solution.

Une approximation de $\dfrac{f(10)}{10} \approx 0{,}18683$ ...

Une approximation de $f'(a) \approx 0.205910$...



EXERCICE 4 4 points Commun à tous les candidats

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$x_n = \int_0^1 t^n \cos t \,\mathrm{d}t \quad \text{et } y_n = \int_0^1 t^n \sin t \,\mathrm{d}t .$$

1. a. Montrer que la suite (x_n) est à termes positifs.

Remarquer: $1 < \dfrac{\pi}{2}$

Pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\cos t > 0$, d'où, $t^n \cos t \geqslant 0$ et d'après la positivité de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^1 t^n \cos t \,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

b. Étudier les variations de la suite (x_n).

$0 \leqslant t \leqslant 1$ implique $0 \leqslant t^{n+1} \leqslant t^n \leqslant 1$

Comme $\cos t > 0$, il vient: $0 \leqslant t^{n+1} \cos t \leqslant t^n \cos t \leqslant \cos t$

L'intégration sur [0; 1] conservant l'ordre, on obtient: $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 t^{n+1} \cos t \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n \cos t \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \cos t \,\mathrm{d}t$

On a donc: $0 \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n \leqslant \sin(1)$

la suite (x_n) est décroissante

c. Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (x_n) ?

la suite (x_n) est décroissante et minorée par 0, donc, elle converge vers un réel l positif ou nul.

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $x_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.

On sait: $0 \leqslant \cos t \leqslant 1$, d'où, comme $t^n \geqslant 0$, on obtient: $0 \leqslant t^n \cos t \leqslant t^n$

L'intégration sur [0; 1] conservant l'ordre, on obtient: $0 \leqslant \int_0^1 t^n \cos t \, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n \, \mathrm{d}t$

$$\int_0^1 t^n \, \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

pour tout entier naturel n non nul, $x_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.

b. En déduire la limite de la suite (x_n).

Comme la suite pour tout entier naturel n non nul, $\frac{1}{n+1}$. converge vers 0, le théorème des gendarmes montre que la suite (x_n) converge vers 0.

3. a. À l'aide d'une intégration par parties,

démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$.

$\int_0^1 t^{n+1} \cos t \, \mathrm{d}t$ On pose: $\begin{cases} u(t) = t^{n+1} \\ v'(t) = \cos t \end{cases}$, d'où, $\begin{cases} u'(t) = (n+1)t^n \\ v(t) = \sin t \end{cases}$

Les conditions d'une I.p.p. étant remplies (u et v dérivables à dérivées continues),

$$\int_0^1 t^{n+1} \cos t \, \mathrm{d}t = \left[t^{n+1} \sin t\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1) t^n \sin t \, \mathrm{d}t$$

En sortant la constante $n + 1$, ..., pour tout entier naturel n non nul, $x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$.

b. En déduire que $\lim_{n \to +\infty} y_n = 0$

On en tire: $y_n = \frac{1}{n+1} (\sin(1) - x_{n+1})$

Comme la suite (x_n) converge vers 0, $(\sin(1) - x_{n+1})$ converge vers $\sin(1)$, et,

comme $\frac{1}{n+1}$ converge vers 0, le produit converge vers 0

4. On admet que, pour tout entier naturel n non nul, $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$.

Déterminer $\lim\limits_{\ln \to +\infty} n\,x_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n\,y_n$

De l'égalité, $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$, il vient: $nx_n = \cos(1) + y_{n+1} - x_n$, d'où, $\lim\limits_{\ln \to +\infty} n\,x_n = \cos(1)$

et de $x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$, on tire: $ny_n = \sin(1) + y_n - x_{n+1}$, d'où, $\lim\limits_{n \to +\infty} n\,y_n = \sin(1)$
