Exercice 1 (Amérique du Sud Novembre 2004)

f est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=xe^{-x}$

Γ est la courbe représentative dans un repère orthonormé (unité: 10 cm)

Partie A:

1a) On sait $\lim_{x\to-\infty} xe^{x}=0$, d'où, $\lim_{x\to+\infty}(-x)e^{-x}=0$. Conclusion: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

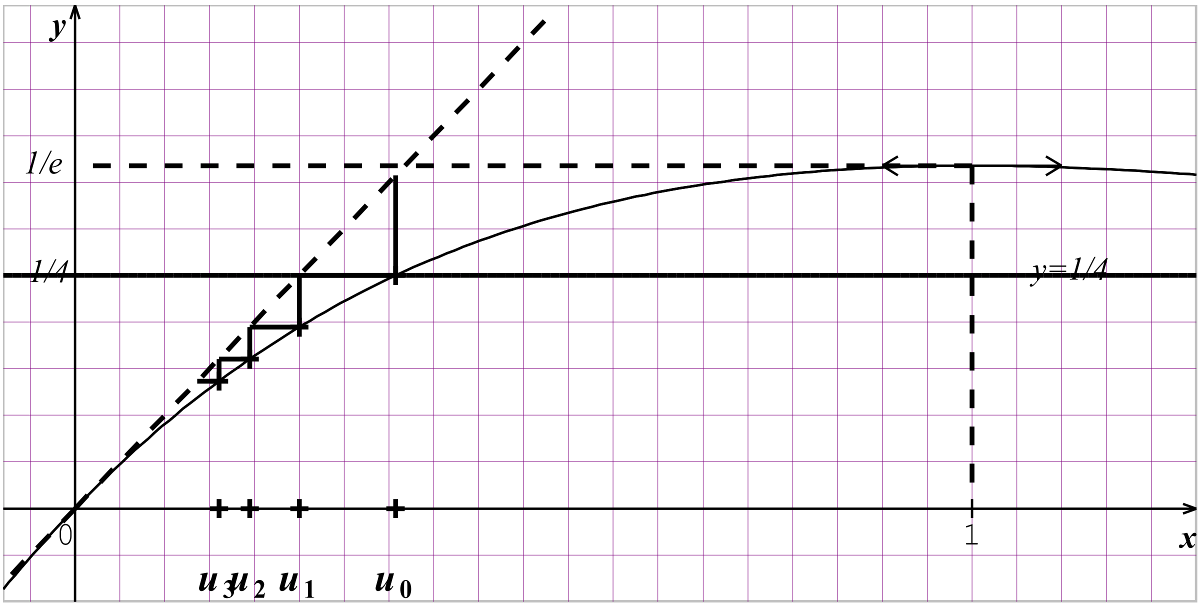
b) *f*, étant le produit des fonctions $x\mapsto x$ et $x\mapsto e^{-x}$ dérivables sur $[0\,;+\infty[$ est dérivable sur $[0\,;+\infty[$, et, pour tout $x\geq 0$, on a: $f'(x)=1\cdot e^{-x}+(-1)xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$

Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $1-x$.

f est strictement croissante sur $[0\,;1]$ et strictement décroissante sur $[1\,;+\infty[$

Tableau de variations:

c) Construction de Γ



2) a) Soit *m* un réel de $\left]0\,;\frac{1}{e}\right[$

Sur chacun des intervalles ouverts $]0\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$, *f* est continue (car dérivable), strictement monotone.

f réalise donc une bijection de $]0\,;1[$ sur $]f(0)\,;f(1)[$ d'une part, et, de $]1\,;+\infty[$ sur $\left]\lim_{x\to+\infty} f(x)\,;f(1)\right[$ d'autre part.

Or $f(0)=0$ et $f(1)=\frac{1}{e}$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Pour tout *m* de $\left]0\,;\frac{1}{e}\right[$, il existe donc un réel x_1 de $]0\,;1[$ et un réel x_2 de $]1\,;+\infty[$ tels que $f(x_1)=f(x_2)=m$

b) Si $m=\frac{1}{4}$, α étant la solution de $f(x)=\frac{1}{4}$ sur $]0\,;1[$ la calculatrice donne: $f(0{,}35)\approx 0{,}24664$ et $f(0{,}36)\approx 0{,}25116$, d'où $0{,}35<\alpha<0{,}36$

(On a: $2{,}15<\beta<2{,}16$)

c) $f(x)=0$ a pour unique solution 0 et $f(x)=\frac{1}{e}$ a pour unique solution 1

Partie B

1) (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \textit{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$ où α est le réel de A)2)b)

a) Soit $P(n)$, pour tout entier naturel *n*, $u_n > 0$
* $u_0 = \alpha$ et $\alpha \in]0;1[$ $P(0)$ est vérifiée
** Soit un entier naturel *p* tel que $u_p > 0$ (hypothèse de récurrence)
Comme $e^x > 0$ pour tout x réel, $e^{-u_p} > 0$
Or, $u_p > 0$, d'où, le produit $u_p e^{-u_p} > 0$. On obtient: $u_{p+1} > 0$
On a montré: si $P(p)$ alors $P(p+1)$
*** D'après l'axiome de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel *n*.
b) $u_{n+1} - u_n = u_n(e^{-u_n} - 1)$. Comme $u_n > 0$ et la fonction *exp* est strictement croissante, on a: $-u_n < 0$ et $e^{-u_n} < e^0$, soit: $e^{-u_n} - 1 < 0$.
$u_{n+1} - u_n < 0$. La suite (u_n) est strictement décroissante
c) La suite (u_n) est minorée par 0 et strictement décroissante. Elle est par conséquent convergente.
Soit *l* sa limite.
Comme $u_{n+1} = f(u_n)$, *l* vérifie l'égalité *f(l)=l*. D'après A.2.c, $l = 0$
Remarque: Lorsqu'une suite est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ où *f* est une fonction continue, si la limite *l* existe alors la limite *l* vérifie $l = f(l)$.
Il est nécessaire de montrer dans un premier temps que (u_n) converge, puis, il convient souvent d'étudier la fonction *g* définie par *g(x)=f(x)-x* et de démontrer que sur un intervalle *I* contenant tous les termes u_n à partir d'un certain rang l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution *l*.
2) (w_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \ln u_n$
a) pour tout entier naturel *n*, on a: $w_n - w_{n+1} = \ln u_n - \ln u_{n+1} = \ln \dfrac{u_n}{u_{n+1}}$

$\dfrac{u_n}{u_{n+1}} = \dfrac{u_n}{u_n e^{-u_n}} = e^{u_n}$. Comme $\ln e^{u_n} = u_n$, on a: $w_n - w_{n+1} = u_n$
b) $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$
D'après a) $S_n = (w_0 - w_1) + (w_1 - w_2) + ... + w_n - w_{n+1} = w_0 - w_{n+1}$
On peut présenter sous forme d'une somme de lignes et montrer les simplifications ligne par ligne

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = w_0 - \cancel{w_1} \\ u_1 = \cancel{w_1} - \cancel{w_2} \\ ... \\ u_{n-1} = \cancel{w_{n-1}} - \cancel{w_n} \\ u_n = \cancel{w_n} - w_{n+1} \\ \hline S_n = w_0 - w_{n+1} \end{array}\right.$$

On peut faire aussi un raisonnement par récurrence
$Q(n): S_n = w_0 - w_{n+1}$
* Q(0): $S_0 = u_0 = \alpha$ et $w_0 - w_1 = u_0 = \alpha$
** Soit un entier p $Q(p): S_p = w_0 - w_{p+1}$
$S_{p+1} = S_p + u_{n+1} = (w_0 - w_{p+1}) + (w_{p+1} - w_{p+2}) = w_0 - w_{p+1}$ *c-à-d* $Q(p+1)$
c) $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$, car, $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$
3) (v_n) est définie par v_0 et, pour tout entier *n*, $v_{n+1} = v_n e^{-v_n}$
Soit $v_0 = \beta$ (défini au A.2.b)
On a: $u_1 = f(\alpha) = f(\beta) = v_1$
Or, si à un rang $p \geq 1$, on a: $u_p = v_p$, alors $u_{p+1} = f(u_p) = f(v_p) = v_{p+1}$
Il existe donc une valeur de v_0 différente de α telle que, pour tout $n \geq 1$, $v_n = u_n$. Cette valeur de v_0 est la valeur β de $]1;+\infty[$ telle que $f(\beta) = \dfrac{1}{4}$

Exercice 3 (Amérique du Sud novembre 2004)
Une urne contient 4 boules rouges et 2 boules noires indiscernables au toucher.
1) On effectue un tirage sans remise de deux boules de l'urne.
Le texte est ambigu. Soit on tire l'une après l'autre les deux boules, soit on les tire simultanément. Même si les résultats dans ces questions sont identiques, le raisonnement n'est pas le même. Il est nécessaire d'indiquer le modèle choisi.
Modèle 1: Tirages simultanés de deux boules:
Le nombre de cas possibles est: $\binom{6}{2}=15$ (Nombre de paires)

A_0 : aucune boule noire (donc deux boules rouges) $p(A_0)=\dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}}=\dfrac{6}{15}=\dfrac{2}{5}$

A_1 : une seule boule noire (donc une boule rouge et une boule noire): $p(A_1)=\dfrac{\binom{4}{1}\times\binom{2}{1}}{\binom{6}{2}}=\dfrac{8}{15}$

A_2 : Deux boules noires $p(A_2)=\dfrac{\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}}=\dfrac{1}{15}$

Modèle 2: Tirages successifs sans remise de deux boules:
Le nombre de cas possibles est $6\times 5=30$ *(Nombre de couples)*

$p(A_0)=p(R_1)\times p_{R_1}(R_2)=\dfrac{4}{6}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{12}{30}=\dfrac{2}{5}$

$p(A_1)=p(R_1)\times p_{R_1}(N_2)+p(N_1)\times p_{N_1}(R_2)=\dfrac{4}{6}\times\dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{6}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{16}{30}=\dfrac{8}{15}$

$p(A_2)=p(N_1)\times p_{N_1}(N_2)=\dfrac{2}{6}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{2}{30}=\dfrac{1}{15}$

2) L'urne contient actuellement 4 boules (la composition dépend du résultat précédent).
Modèle 1: Tirages simultanés de deux boules:
Le nombre de cas possibles est: $\binom{4}{2}=6$ (Nombre de paires)

B_0 : aucune boule noire au tirage N°2

$p_{A_0}(B_0)=\dfrac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}}=\dfrac{1}{6}$, car, A_0 étant réalisé, l'urne contient 2 boules rouges et 2 boules noires.

$p_{A_1}(B_0)=\dfrac{\binom{3}{2}}{\binom{4}{2}}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$, car, A_1 étant réalisé, l'urne contient 3 boules rouges et 1 boule noire.

$p_{A_2}(B_0)=\dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{4}{2}}=1$, car, A_2 étant réalisé, l'urne contient 4 boules rouges.

b) D'après la formule des probabilités totales, $p(B_0)=p(A_0)\times p_{A_0}(B_0)+p(A_1)\times p_{A_1}(B_0)+p(A_2)\times p_{A_2}(B_0)$

$$p(B_0)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{6}+\frac{8}{15}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\times 1=\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$$

c) B_1 : une seule boule noire au tirage N°2

$p_{A_0}(B_1)=\dfrac{\binom{2}{1}\times\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$, car, A_0 étant réalisé, l'urne contient 2 boules rouges et 2 boules noires.

$p_{A_1}(B_1)=\dfrac{\binom{3}{1}\times 1}{\binom{4}{2}}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$, car, A_1 étant réalisé, l'urne contient 3 boules rouges et 1 boule noire.

$p_{A_2}(B_1)=0$, car, A_2 étant réalisé, l'urne contient 4 boules rouges.

$$p(B_1)=p(A_0)\times p_{A_0}(B_1)+p(A_1)\times p_{A_1}(B_1)+p(A_2)\times p_{A_2}(B_1)$$

$$p(B_1)=\frac{2}{5}\times\frac{4}{6}+\frac{8}{15}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\times 0=\frac{16}{30}=\frac{8}{15}$$

B_2 : deux boules noires au tirage N°2

$p_{A_0}(B_2)=\dfrac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}}=\dfrac{1}{6}$, car, A_0 étant réalisé, l'urne contient 2 boules rouges et 2 boules noires.

$p_{A_1}(B_2)=0$, car, A_1 étant réalisé, l'urne contient 3 boules rouges et 1 boule noire.

$p_{A_2}(B_2)=0$, car, A_2 étant réalisé, l'urne contient 4 boules rouges.

$$p(B_2)=p(A_0)\times p_{A_0}(B_2)+p(A_1)\times p_{A_1}(B_2)+p(A_2)\times p_{A_2}(B_2)$$

$$p(B_2)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{6}+\frac{8}{15}\times 0+\frac{1}{5}\times 0=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$$

d) B_1 est réalisé et on cherche donc A_1 sachant que B_1 est réalisé.

$$p_{B_1}(A_1)=\frac{p(A_1\cap B_1)}{p(B_1)}=\frac{P_{A_1}\times p_{A_1}(B_1)}{p(B_1)}=\frac{\frac{8}{15}\times\frac{1}{2}}{\frac{8}{15}}=\frac{1}{2}$$

3) R "il a fallu deux tirages exactement pour extraire les deux boules noires"

R est donc la réunion des événements **disjoints** : $A_1\cap B_1$ et $A_0\cap B_2$

$$p((A_1\cap B_1)\cup(A_0\cap B_2))=p(A_1)\times p_{A_1}(B_1)+p(A_0)\times p_{A_0}(B_2)=\frac{4}{15}+\frac{1}{15}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$$

Exercice 4 (Amérique du Sud novembre 2004)

Partie A

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité: 1 cm)

P d'affixe *p* où $p=10$ et Γ le cercle de diamètre *[OP]*

Ω le centre de Γ a donc pour affixe 5 et le rayon du cercle est 5

A, *B* et *C* d'affixes respectives $a=5+5\mathrm{i}$, $b=1+3\mathrm{i}$ et $c=8-4\mathrm{i}$

1) $A\in\Gamma$ car $\Omega A=|5+5\mathrm{i}-5|=|5\mathrm{i}|=5$, $B\in\Gamma$ car $\Omega B=|1+3\mathrm{i}-5|=|-4+3\mathrm{i}|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$

$C\in\Gamma$ car $\Omega C=|8-4\mathrm{i}-5|=|3-4\mathrm{i}|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$

2) *D* est le point d'affixe $2+2\mathrm{i}$

Montrons que *D* est sur (BC) et que (OD) est perpendiculaire à (BC)

$\overrightarrow{BD}$ a pour affixe $2+2\mathrm{i}-(1+3\mathrm{i})=1-i$ et $\overrightarrow{BC}$ a pour affixe $8-4\mathrm{i}-(1+3\mathrm{i})=7-7\mathrm{i}=7(1-i)$

On en déduit: $\overrightarrow{BC}=7\,\overrightarrow{BD}$. Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ étant colinéaires, *D* appartient à (BC)

D'autre part: $\overrightarrow{OD}$ a pour coordonnées $(2\,;2)$. Comme $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{BC}=2\times 7+2\times(-7)=0$, les vecteurs $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux, d'où, *D* est le projeté orthogonal de *O* sur (BC) .

Partie B

A tout point $M(z)$ distinct de *O*, on associe le point $M'(z')$ tel que $z'=\dfrac{20}{\bar{z}}$

1) Comme $\dfrac{20}{\bar{z}}=\dfrac{20z}{z\bar{z}}=\dfrac{20}{|z|^2}z$, on obtient: $z'=kz$ avec $k\in\mathbb{R}$. *O*, *M* et *M′* sont donc alignés.

2) Soit Δ la droite d'équation $x=2$ et *M* un point de Δ d'affixe *z*

a) Puisque $M\in\Delta$, on a: $z=2+yi$ avec $y\in\mathbb{R}$, d'où, $\bar{z}=2-yi$ et $z+\bar{z}=4$

b) $z'+\overline{z'}=\dfrac{20}{\bar{z}}+\left(\overline{\dfrac{20}{\bar{z}}}\right)=\dfrac{20}{\bar{z}}+\dfrac{20}{z}=20\dfrac{(z+\bar{z})}{z\bar{z}}=\dfrac{80}{z\bar{z}}$ et $z'\cdot\overline{z'}=\dfrac{20}{\bar{z}}\times\dfrac{20}{z}=\dfrac{400}{z\bar{z}}$

On en déduit: $\dfrac{z'\cdot\overline{z'}}{z'+\overline{z'}}=\dfrac{400}{z\bar{z}}\times\dfrac{z\bar{z}}{80}=5$ Conclusion: $5(z'+\overline{z'})=z'\cdot\overline{z'}$

c) Évaluons $\Omega M'$

$\overrightarrow{\Omega M'}$ a pour affixe $z'-5$.

$\Omega M'^2=(z'-5)\overline{(z'-5)}=(z'-5)(\overline{z'}-5)$

$=z'\bar{z}'-5(z'+\overline{z'})+25=25$

$5(z'+\overline{z'})=z'\cdot\overline{z'}$

On en déduit: $\Omega M'=|z'-5|=5$

M′ est un point de Γ

et comme $M'\in(OM)$,

M′ est le deuxième point d'intersection de (OM) et Γ .