Asie juin 2004

Exercice (bac 2004)
Partie A: Étude d'une fonction f

On appelle *f* la fonction définie sur l'intervalle $I=\left]\frac{-1}{2};+\infty\right[$ par $f(x)=\ln(1+2x)$

1) Montrer que *f* est strictement croissante sur l'intervalle *I*.

Sur $I=\left]\frac{-1}{2};+\infty\right[$, $1+2x>0$.

f est la fonction composée de la fonction affine $x\mapsto 1+2x$ suivie de la fonction ln.

Ces deux fonctions étant strictement croissantes, la composée est strictement croissante sur $I=\left]\frac{-1}{2};+\infty\right[$

ou bien, f est dérivable sur I car f est de la forme $\ln\circ u$ *avec u > 0 et dérivable sur I, d'où,* $f'=\frac{u'}{u}$

$f'(x)=\frac{2}{1+2x}$ ....

2) Déterminer la limite de *f(x)* quand *x* tend vers $\frac{-1}{2}$

$\lim\limits_{x\to\frac{-1}{2}}(1+2x)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$, d'où, $\lim\limits_{x\to\frac{-1}{2}}\ln(1+2x)=-\infty$.

3) On considère la fonction *g* définie sur l'intervalle *I* par $g(x)=f(x)-x$

Analysez ce que représente g. g est la différence entre f et la fonction identité. Graphiquement, g(x) est l'écart relatif entre un point de C_f *et un point de* Δ *d'équation* $y=x$

a) Étudier les variations de *g* sur l'intervalle *I*

$g'(x)=f'(x)-1=\frac{2-(1+2x)}{1+2x}=\frac{1-2x}{1+2x}$

Sur *I*, le signe de *g'(x)* est celui de $1-2x$

g est donc strictement croissante sur $I_1=\left]\frac{-1}{2};\frac{1}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $I_2=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

g a pour maximum $g(\frac{1}{2})=\ln 2-\frac{1}{2}$. Comme $2>\sqrt{e}$, $g(\frac{1}{2})>0$

b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet deux solutions: 0 et une autre, notée β , appartenant à l'intervalle [1;2]

Pour utiliser les théorèmes des valeurs intermédiaires et de la bijection, les conditions sont précises. Une seule de ces conditions manque et le raisonnement est faux puisqu'on ne peut pas conclure.

Sur I_1 , *g* est **continue** (car dérivable), **strictement croissante**, donc, g réalise une bijection de I_1 sur $\left]\lim\limits_{x\to\frac{-1}{2}}g(x);g(\frac{1}{2})\right]$.

Comme $\left]\lim\limits_{x\to\frac{-1}{2}}g(x);g(\frac{1}{2})\right]=\left]-\infty;\ln 2\right]$ et que $\mathbf{0\in]-\infty;\ln 2]}$, alors il existe une et une seule solution appartenant à I_1 . Comme $g(0)=0$, cette solution est 0.

Sur I_2 , *g* est **continue** (car dérivable), **strictement décroissante**, donc, g réalise une bijection de I_2 sur $\left]\lim\limits_{x\to+\infty}g(x);g(1\text{over}2)\right]$.

Comme $\left]\lim\limits_{x\to+\infty}g(x);g(\frac{1}{2})\right]=\left]-\infty;\ln 2\right]$ et que $\mathbf{0\in]-\infty;\ln 2]}$, alors il existe une et une seule solution β appartenant à I_2 .

De plus $g(1)=\ln 3-1>0$, car, $3>e$ et $g(2)=\ln 5-2<0$, car, $5<e^2$

Puisque $0 \in [g(2);g(1)]$ alors $\beta \in [1;2]$

c) En déduire le signe de *g(x)*, pour *x* appartenant à l'intervalle *I*.

On a donc: si $\frac{-1}{2} < x < 0$, alors $g(x) < g(0)$, d'où, $g(x) < 0$ (*g* strictement croissante sur ... et $g(0)=0$)

Si $0 < x < \frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2} < x < \beta$ alors $g(0) < g(x) < g(\frac{1}{2})$ ou $g(\frac{1}{2}) > g(x) > g(\beta)$, d'où, $g(x) > 0$ dans les deux cas. (*g* strictement croissante sur ... et $g(0)=0$; *g* strictement décroissante sur ... et $g(\beta)=0$)

Si $x > \beta$ alors $g(x) < g(\beta)$, d'où, $g(x) < 0$ (*g* strictement décroissante sur ... et $g(\beta)=0$)

4) Montrer que pour tout réel *x* appartenant à l'intervalle $]0;\beta[$, *f(x)* appartient aussi à $]0;\beta[$

Remarquer: $g(\beta)=\beta$ équivaut à $f(\beta)=\beta$. *(on dit que* β *est un point fixe de f. Graphiquement,* (β,β) *est le couple coordonnées du point d'intersection de* C_f *et* Δ *)*

On a montré: *f* strictement croissante sur *I*, d'où, si $0 < x < \beta$ alors $f(0) < f(x) < f(\beta)$, comme, $f(\beta)=\beta$

Par conséquent: pour tout réel *x* appartenant à l'intervalle $]0;\beta[$, *f(x)* appartient aussi à $]0;\beta[$ *(on dit que l'intervalle* $]0;\beta[$ *est stable par f)*

Partie B: Étude d'une suite récurrente

On appelle $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_{n+1}=f(u_n)$ et $u_0=1$

1) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, u_n appartient à $]0;\beta[$ *P(n)*

* $u_0=1$ et $\beta \in [1;2]$ et $\beta \neq 1$ ($g(1) \neq 0$), d'où, $u_0 \in]0;\beta[$ *P(0)* est vérifiée.

** Soit **un entier naturel** *p* tel que $u_p \in]0;\beta[$. *P(p)*

D'après A 4), on obtient: $f(u_p) \in]0;\beta[$. Or, $f(u_p)=u_{p+1}$, d'où, $u_{p+1} \in]0;\beta[$. *P(p+1)*

On a montré: $P(p) \Rightarrow P(p+1)$

*** d'après l'axiome de récurrence, *P(n)* est vraie pour tout entier naturel *n*.

2) Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante Appelons *Q(n):* $u_n < u_{n+1}$

* $u_0=1$ et $u_1=f(1)=\ln 3$. $e<3$ implique $1<\ln 3$ *Q(0)* est vérifiée;

** Soit **un entier naturel** *p* tel que $u_p < u_{p+1}$ *Q(p)*

f étant strictement croissante sur *I,* on a*:* $f(u_p) < f(u_{p+1})$ soit $u_{p+1} < u_{p+2}$ *Q(p+1)*

On a montré: $Q(p) \Rightarrow Q(p+1)$

*** d'après l'axiome de récurrence, *Q(n)* est vraie pour tout entier naturel *n*.

3) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

La suite étant croissante et majorée par β est convergente

Partie C: Recherche de la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$

1) Montrer que, pour tout réel $x \geq 1$, $f'(x) \leq \frac{2}{3}$

$f'(x)=\frac{2}{1+2x}$. Si $x \leq 1$ alors $1+2x \geq 3$ et $\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{3.}$

2 étant positif, on a: $f'(x) \leq \frac{2}{3}$

2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel *n*, $\int_{u_n}^{\beta} f'(t)dt \leq \frac{2}{3}(\beta - u_n)$

Comme $u_n < \beta$, les théorèmes de comparaison des intégrales donnent: $\int_{u_n}^{\beta} f'(t)dt \leq \int_{u_n}^{\beta} \frac{2}{3} dt$

Or, $\int_{u_n}^{\beta} \frac{2}{3}\,dt=\frac{2}{3}(\beta-u_n)$, ce qui prouve: $\int_{u_n}^{\beta} f'(t)dt\leq\frac{2}{3}(\beta-u_n)$

b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $\beta-u_{n+1}\leq\frac{2}{3}(\beta-u_n)$, puis, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que $0\leq\beta-u_n\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n$

D'autre part, $\int_{u_n}^{\beta} f'(t)dt=f(\beta)-f(u_n)=\beta-u_{n+1}$, d'où, $\beta-u_{n+1}\leq\frac{2}{3}(\beta-u_n)$

Appelons *R(n)*: $0\leq\beta-u_n\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$\beta-u_n\geq 0$ d'après la partie B. Il reste à prouver: $\beta-u_n\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n$

* $\beta-u_0\leq 1$ car, $\beta\in[1;2]$ et $u_0=1$. On a aussi: $\left(\frac{2}{3}\right)^0=1$ *R(0)* est vraie

** Soit **un entier naturel** *p* tel que $0\leq\beta-u_p\leq\left(\frac{2}{3}\right)^p$ *R(p)*

Comme $\beta-u_{p+1}\leq\frac{2}{3}(\beta-u_p)$, on a: $\beta-u_{p+1}\leq\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^p$, soit, $\beta-u_{p+1}\leq\left(\frac{2}{3}\right)^{p+1}$ *R(p+1)*

On a montré: $R(p)\Rightarrow R(p+1)$

*** d'après l'axiome de récurrence, R*(n)* est vraie pour tout entier naturel *n*.

c) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$

$0<\frac{2}{3}<1$, donc, la suite $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ converge vers 0.

D'après le théorème des gendarmes, $\beta-u_n$ converge vers 0 (l'encadrement est nécessaire)

La suite (u_n) converge donc vers β

Asie juin 2004