Probabilités Asie Bac S juin 2005

remplacer à la troisième ligne « simultanément » par « successivement sans remise »

Une association organise une loterie pour laquelle une participation m exprimée en euros est demandée.
Un joueur doit tirer « successivement sans remise » ~~simultanément~~ au hasard, deux boules dans une urne contenant 2 boules vertes et 3 boules jaunes.
Si le joueur obtient deux boules de couleurs différentes, il a perdu.
Si le joueur obtient deux boules jaunes, il est remboursé de sa participation m.
Si le joueur obtient 2 boules vertes, il peut continuer le jeu qui consiste à faire tourner une roue où sont inscrits des gains répartis comme suit:

• sur $\frac{1}{8}$ de la roue le gain est de 100 €,

• sur $\frac{1}{4}$ de la roue le gain est de 20 €,

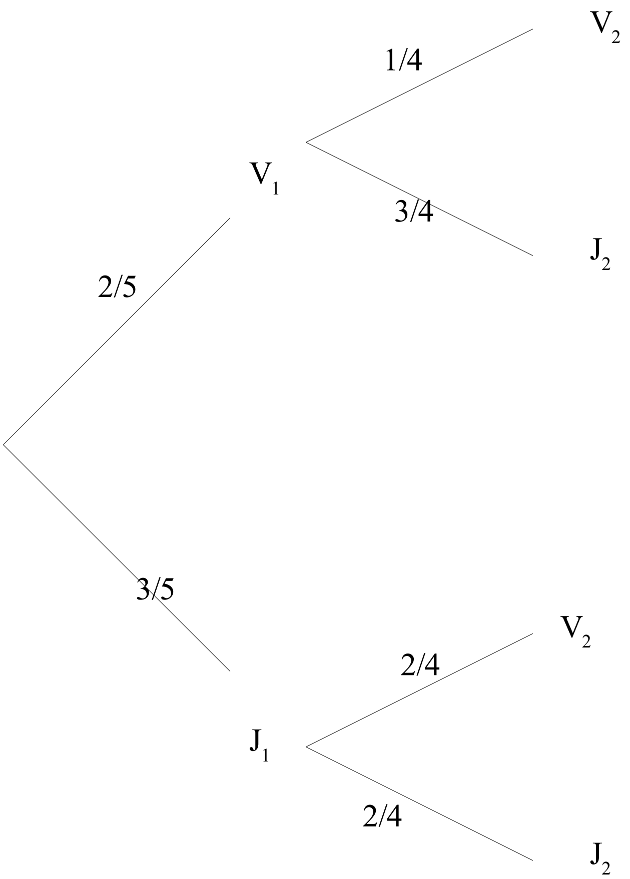
• sur le reste, le joueur est remboursé de sa participation m.

On appelle V l'évènement «le joueur a obtenu 2 boules vertes».
On appelle J l'évènement «le joueur a obtenu 2 boules jaunes».
On appelle R l'évènement «le joueur est remboursé de sa participation et ne gagne rien».

1. Quelques calculs.

a. Calculer les probabilités P(V) et P(J) des évènements respectifs V et J.

On peut faire l'arbre suivant où l'indice correspond au n° du tirage: première et deuxième boule.



$P(V) = P(V_1 \cap V_2) = P(V_1) \times P_{V_1}(V_2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$

De même, pour $P(J) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$

b. On note $P_V(R)$ la probabilité pour le joueur d'être remboursé sachant qu'il a obtenu deux boules vertes.
Déterminer $P_V(R)$ puis $P(R \cap V)$.
$P_V(R)$ Le joueur a effectivement tirer deux boules vertes et après avoir fait tourner la roue, il est remeboourssé de sa mise, d'où, $P_V(R) = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$

$P(R \cap V) = P(V) \times P_V(R) = \frac{1}{10} \times \frac{5}{8} = \frac{1}{16}$

c. Calculer $P(R)$.
La probabilité d'être remboursé est la somme des probabilités des événements **disjoints** J et $R \cap V$.

$P(R) = P(J) + P(R \cap V) = \frac{3}{10} + \frac{1}{16} = \frac{29}{80}$

d. Calculer la probabilité de gagner les 100 €, puis la probabilité de gagner les 20 € de la roue.

$P(100€) = P(V \cap \text{" 100 "}) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{80}$

$P(20€) = P(V \cap \text{" 20 "}) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{40}$.

2. On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur, c'est-à-dire la différence entre les sommes éventuellement perçues et la participation initiale m.
a. Donner les valeurs prises par la variable aléatoire X.
L'univers-image est: $X(\Omega) = \{-m, 0; 20 - m; 100 - m\}$
b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X et vérifier que $p(X = -m)$ est 0,6.

$P(X = -m) = 1 - P(V) - P(J) = 1 - \frac{4}{10} = \frac{6}{10} = \frac{48}{80}$.

$P(X = 0) = P(R) = \frac{29}{80}$

$P(X = 20 - m) = P(\text{" 20 "}) = \frac{1}{40} = \frac{2}{80}$.

$P(X = 100 - m) = P(\text{" 100 "}) = \frac{1}{80}$

On vérifie: $\frac{48+29+2+1}{80} = 1$

c. $E(X) = -m \times \frac{48}{60} + 0 \times \frac{29}{80} + (20 - m) \times \frac{2}{80} + (100 - m) \times \frac{1}{80} = \frac{-48m+40-2m+100-m}{80} = \frac{140-51m}{80}$.

d. L'organisateur veut fixer la participation m à une valeur entière en euro.
Quelle valeur minimale faut-il donner à m pour que l'organisateur puisse espérer ne pas perdre d'argent?
Dans ce cas, $X < 0$ si et seulement si $140 - 51m < 0$, soit: $m > \frac{140}{51}$.
La valeur minimale entière de m est donc 3 €

3. Un joueur se présente et décide de jouer 4 fois, quels que soient les résultats obtenus.
Calculer la probabilité qu'il perde au moins une fois sa mise.
Soit la variable aléatoire Y où Y est le nombre de parties où le joueur ne perd pas sa mise
On reconnaît une expérience de Bernoulli avec $p = \frac{4}{10}$ et $n = 4$

On applique la loi binomiale $\mathscr{B}(\frac{4}{10}\ ; 4)$ à la variable aléatoire Y

$P(Y = 0) = \left(\frac{4}{10}\right)^4$ (Le joueur n'a jamais perdu sa mise)

$P(Y \geqslant 1) = 1 - \left(\frac{4}{10}\right)^4 = 1 - 0{,}025\,6 = 0{,}974\,4$

4. On voudrait qu'un joueur ait plus d'une chance sur deux d'être remboursé de sa mise ou de gagner quand il joue une seule fois. On note G cet évènement.
Pour cela on garde deux boules vertes dans l'urne mais on modifie le nombre de boules jaunes. On appelle *n* le nombre de boules jaunes, on suppose $n \geqslant 1$.
Calculer la valeur minimale de *n* pour que la condition précédente soit vérifiée.

Il suffit de modifier l'arbre initial en posant $P(V_1) = \frac{2}{n+2}$ et $P(J_1) = \frac{n}{n+2}$.

$P_{V_1}(V_2) = \frac{1}{n+1}$ et $P_{J_1}(J_2) = \frac{n-1}{n+1}$ ....

$P(G) = P(V) + P(J) = \frac{2}{n+2} \times \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+2} \times \frac{n-1}{n+1} = \frac{n^2-n+2}{(n+2)(n+1)}$

On veut $P(G) > \frac{1}{2}$, soit, $\frac{n^2-n+2}{(n+2)(n+1)} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow n^2 - 5n + 2 > 0$

Le trinôme du second degré a pour racines: $\frac{5-\sqrt{17}}{2}$ et $\frac{5+\sqrt{17}}{2}$

et est positif (signe du coefficient de n^2) à l'extérieur des racines.

Comme $n \geqslant 1$, il faut $n \in \mathbb{N}$ et $n > \frac{5+\sqrt{17}}{2}$

$n \geqslant 5$.

la valeur minimale de *n* pour que la condition précédente soit vérifiée est donc 5.