Exercice 1 : ***6 points D'après Bac France septembre 2005***
Partie A

La fonction f est définie sur l'intervalle [0; +∞[par f (x) = (20x + 10) $e^{-\frac{1}{2}x}$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ *(unité graphique: 1 cm).*
***1.** Étudier la limite de la fonction f en +∞.*

On peut écrire en posant $X = \dfrac{x}{2}$, $(20x + 10)\, e^{-\frac{1}{2}x} = \dfrac{40\,X}{e^X} + \dfrac{10}{e^X}$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$, on étudie la limite en +∞ de la fonction: $X \mapsto \dfrac{40\,X}{e^X} + \dfrac{10}{e^X}$

Or, on sait: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ (*croissances comparées*) donc leurs inverses ont une limite nulle en +∞.
Conclusion: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

***2.** Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.*

f est le **produit** de deux fonctions: une fonction affine $u: x \mapsto 20x + 10$ et $v: x \mapsto e^{-\frac{1}{2}x}$ de la forme e^w dérivables sur [0; +∞[.

f est donc dérivable sur cet intervalle, et, pour tout $x \geqslant 0$, on a: $f'(x) = 20.\, e^{-\frac{1}{2}x} + (-\dfrac{1}{2}\, e^{-\frac{1}{2}x})(20x + 10)$

$f'(x) = (-10x + 15)\, e^{-\frac{1}{2}x} = 5(3 - 2x)\, e^{-\frac{1}{2}x} =$

Comme $e^{-\frac{1}{2}x} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $3 - 2x$ *(ou de $-10x + 15$)*.

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	10	$\nearrow$	M	$\searrow$	0

$M = f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 40\ e^{-3/4}$ Une valeur approchée de M est: 18,9 à 0,1 près par excès.

***3.** Établir que l'équation f (x) = 10 admet une unique solution strictement positive α dans l'intervalle]0; +∞[. donner une valeur approchée de α à* 10^{-3} *près.*

Sur l'intervalle [0; $\dfrac{3}{2}$], *f* est strictement croissante, d'où, si $x > 0$ alors $f(x) > f(0)$.

Comme $f(0) = 10$, l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur]0; $\dfrac{3}{2}$].

Sur l'intervalle [$\dfrac{3}{2}$; +∞[, *f* est dérivable, donc,

***f* est continue,**

***f* est strictement décroissante**, donc, *f* réalise une bijection de [$\dfrac{3}{2}$; +∞[**sur]0; *M*].**

Comme $\mathbf{0 < 10 < M}$, il existe une et une seule solution α à l'équation $f(x) = 10$
La calculatrice donne: $f(4{,}673) \approx 10{,}000\,9$ à 10^{-4} près par défaut et $f(4{,}674) \approx 9{,}998$ à 10^{-3} près par excès.
On a donc: $4{,}673 < \alpha < 4{,}674$

Partie B

On note y(t) la valeur, en degrés Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t, t étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant t = 0, est y(0) = 10.
On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle [0;+∞[associe y(t), est solution de l'équation différentielle (E): $y' + \frac{1}{2}y = 20\,e^{-\frac{1}{2}t}$.

1. *Vérifier que la fonction f étudiée dans la* ***partie A*** *est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle [0; +∞[.*

La fonction f du A est dérivable sur .... et $f'(x) + \frac{1}{2}f(x) = ... = 20\,e^{-\frac{1}{2}x}$ et $f(0) = 10$

Par conséquent, f est une solution de (E).

2. *On se propose de démontrer que cette fonction f est l'unique solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle [0; +∞[, qui prend la valeur 10 à l'instant 0.*

a. *On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle [0; ∞[vérifiant g(0) = 10. Démontrer que la fonction g − f est solution sur l'intervalle [0; +∞[de l'équation différentielle: (E')* $y' + \frac{1}{2}y = 0$.

Soit g une solution de (E).

On a donc: g définie et dérivable sur [0; +∞[et $g'(x) + \frac{1}{2}g(x) = 20\,e^{-\frac{1}{2}x}$.

$$(g-f)'(x) + \frac{1}{2}(g-f)(x) = g'(x) - f'(x) + \frac{1}{2}g(x) - \frac{1}{2}f(x) = 20\,e^{-\frac{1}{2}x} - 20\,e^{-\frac{1}{2}x} = 0$$

Conclusion:

$g - f$ est solution sur l'intervalle [0; +∞[de l'équation différentielle: (E′) $y' + \frac{1}{2}y = 0$.

b. *Résoudre l'équation différentielle (E').*

D'après le cours, les solutions de $y' + \frac{1}{2}y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto C\,e^{-\frac{1}{2}x}$ où $C \in \mathbb{R}$.

c. *Conclure.*

D'après b), les solutions de (E) sont les fonctions g telles que $g - f$ sont les solutions de (E′)

On a donc: $g(x) = f(x) + C\,e^{-\frac{1}{2}x}$

Or, on cherche la solution vérifiant $g(0) = 10$, d'où, $10 = f(0) + C$ et comme $f(0) = 10$, il vient: $C = 0$

Conclusion: la solution de (E) vérifiant la condition initiale $y(0) = 10$ est la fonction f.

3. *Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique redescend-elle à sa valeur initiale? Le résultat sera arrondi à la minute.*

D'après ***partie A. 3***., la température est redescendue à 10 °C au bout de 4,673 heures, soit, environ 4 h 40 min

---

<u>Exercice 2 :</u> ***5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité***
Bac Amérique du Nord juin 2007

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ *(unité graphique: 4 cm).*

Soit A le point d'affixe $z_A = i$ *et B le point d'affixe* $z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

1. *Soit r la rotation de centre O et d'angle* $\frac{2\pi}{3}$. *On appelle C l'image de B par r.*

a. *Déterminer une écriture complexe de r.*

Un écriture complexe de r est: $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z$.

b. *Montrer que l'affixe de C est $z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}}$.*

$z_C = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times e^{-i\frac{5\pi}{6}} = e^{-i(\frac{5\pi}{6}+\frac{4\pi}{6})} = e^{-i\frac{\pi}{6}}$

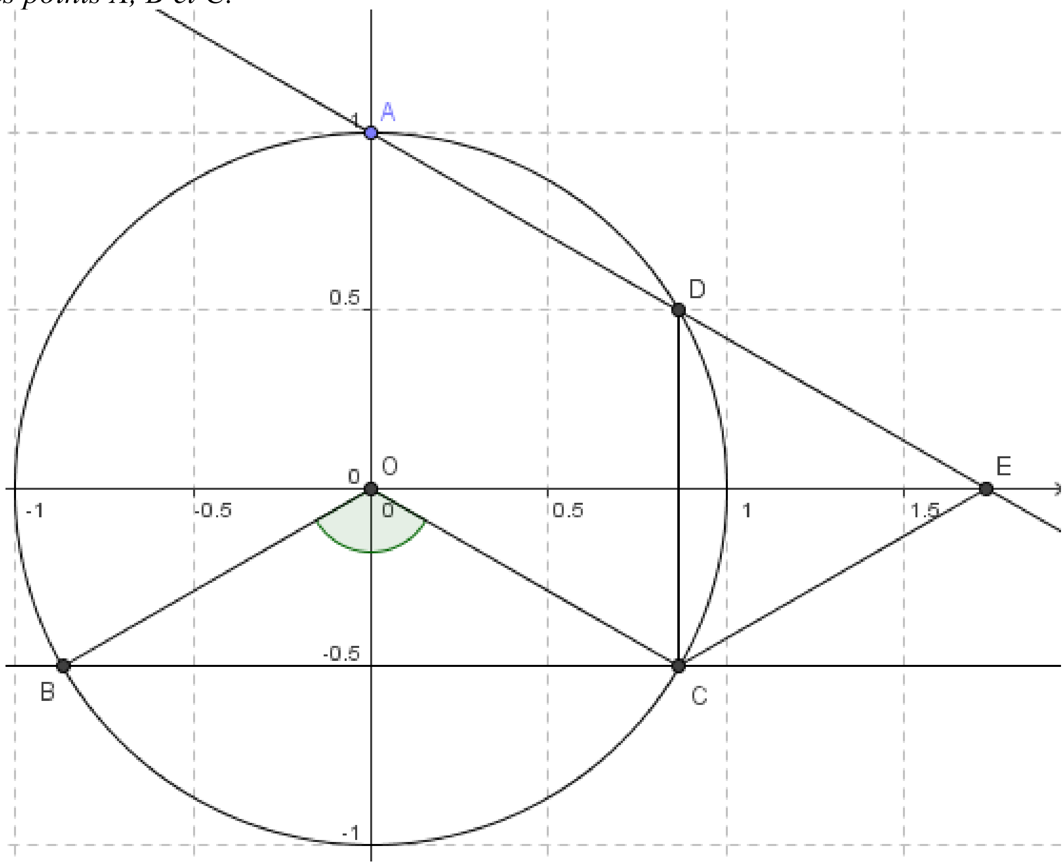
c. *Écrire z_B et z_C sous forme algébrique.*

On sait: $\cos(\frac{-5\pi}{6}) = \cos(\frac{5\pi}{6}) = -\cos(\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\frac{-5\pi}{6}) = -\sin(\frac{5\pi}{6}) = -\sin(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$

$\cos(\frac{-\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\frac{-\pi}{6}) = -\sin(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$

$z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ et $z_C = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

d. *Placer les points A, B et C.*



2. *Soit D le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 2, –1 et 2.*

a. *Montrer que l'affixe de D est $z_D = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.*

D étant le barycentre du système (A; 2), (B; –1), (C; 2), on a: $(2-1+2)\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}$

On en déduit:

$$z_D = \frac{1}{3}(2z_A - z_B + 2z_C) = \frac{1}{3}(2i + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + 2(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)) = \frac{1}{3}(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

b. *Montrer que A, B, C et D sont sur un même cercle.*

On sait déjà: $OA = |z_A| = 1$, $OB = |z_B| = 1$ et $OC = |z_C| = 1$.

Comme $|z_D|^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$, on obtient: $OD = 1$

Les points A, B C, D sont cocycliques (cercle unitaire)

3. *Soit h l'homothétie de centre A et de rapport 2. On appelle E l'image de D par h.*

a. *Déterminer une écriture complexe de h.*

Une écriture complexe de h est: $z' - z_A = 2(z - z_A)$, soit: $z' = 2z - 2\mathrm{i} + \mathrm{i} = 2z - \mathrm{i}$.

b. *Montrer que l'affixe de E est $z_E = \sqrt{3}$. Placer le point E*

$$z_E = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) - \mathrm{i} = \sqrt{3} + \mathrm{i} - \mathrm{i} = \sqrt{3}$$

4. a. *Calculer le rapport $\dfrac{z_D - z_C}{z_E - z_C}$. On écrira le résultat sous forme exponentielle.*

$$\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}}{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$$

ou

$$z_D - z_C = ... = \mathrm{i} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} \text{ et } z_E - z_C = ... = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}, \text{ donc, } \frac{z_D - z_C}{z_E - z_C} = \mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$$

b. *En déduire la nature du triangle CDE.*

On obtient: $z_D - z_C = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}(z_E - z_C)$

D est l'image de E par la rotation de centre C et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

ou

$$\left|\frac{z_D - z_E}{z_E - z_C}\right| = \frac{|z_D - z_E|}{|z_E - z_C|} = \frac{ED}{EC} = 1$$

et $\arg \dfrac{z_D - z_C}{z_E - z_C} = (\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CD}) = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$

Conclusion: $CD = CE$ et $\widehat{ECD} = \dfrac{\pi}{3}$, CDE est un triangle équilatéral

---

Exercice 3 : ***4 points*** ***Bac Polynésie septembre 2005***

On étudie le mouvement aléatoire d'une puce. Cette puce se déplace sur trois cases notées A, B et C.
À l'instant 0, la puce est en A.
Pour tout entier naturel n:

- *si à l'instant n la puce est en A, alors à l'instant (n + 1), elle est:*
  soit en B avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$;
  soit en C avec une probabilité égale à $\frac{2}{3}$.
- *si à l'instant n la puce est en B, alors à l'instant (n + 1), elle est:*
  soit en C, soit en A de façon équiprobable.
- *si à l'instant n la puce est en C, alors elle y reste.*

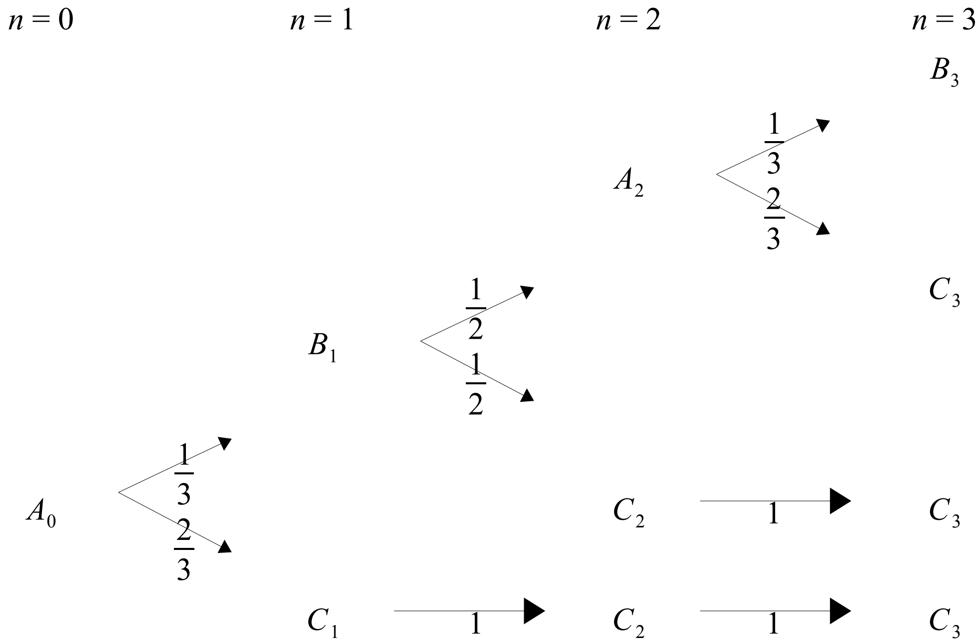
On note A_n (respectivement B_n, C_n) l'événement "à l'instant n la puce est en A" ((respectivement en B, en C).
On note a_n (respectivement b_n, c_n) la probabilité de l'événement A_n (respectivement B_n, C_n).
On a donc: $a_0 = 1$, $b_0 = c_0 = 0$.
Pour traiter l'exercice, on pourra s'aider d'arbres pondérés.
Il est important de faire des arbres de probabilités ou des tableaux.
Les événements sont "être sur une case ... à un instant ... ".
Ce ne sont pas les cases A, B, C.
Sur un arbre de probabilité, on note les probabilités conditionnelles.

Dans les tableaux apparaissent les événements impossibles (intersection des événements est l'ensemble vide)

Tableau 1 *Tableau 2*

	A_2	B_2	C_2		A_3	B_3	C_3
B_1	$A_2 \cap B_1$	$\varnothing$	$C_2 \cap B_1$	A_2	$\varnothing$	$B_3 \cap A_2$	$C_3 \cap A_2$
C_1	$\varnothing$	$\varnothing$	$C_2 \cap C_1$	C_2	$\varnothing$	$\varnothing$	$C_3 \cap C_2$

Arbre de probabilité pour $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$



1. Calculer a_k, b_k et c_k pour k entier naturel tel que $1 \leqslant k \leqslant 3$.

$a_1 = P(A_1) = 0$, puisque partant de A la puce est soit en B, soit en C çà l'exclusion de A

$b_1 = P(B_1) = \dfrac{1}{3}$, puisque partant de A la puce est en B avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$.

$c_1 = P(C_1) = \dfrac{2}{3}$, puisque partant de A la puce est en B avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$.

À l'instant 1, la puce n'a que deux positions possibles *B* ou *C*.

En lisant le tableau 1:

$$a_2 = P(A_2) = P(A_2 \cap B_1) + P(A_2 \cap C_1) = P(A_2 \cap B_1) = P_{B_1}(A_2) \times P(B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$b_2 = P(B_2) = P(B_2 \cap B_1) + P(B_2 \cap C_1) = 0$$

$$c_2 = P(C_2) = P(C_2 \cap B_1) + P(C_2 \cap C_1) = P_{B_1}(C_2) \times P(B_1) + P_{C_1}(C_2) \times P(C_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$$

En lisant l'arbre de probabilité:

$$a_2 = P(A_2) = P(A_2 \cap B_1) + P(A_2 \cap C_1) = P_{B_1}(A_2) \times P(B_1) + P_{C_1}(A_2) \times P(C_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

$$b_2 = P(B_2) = P(B_2 \cap B_1) + P(B_2 \cap C_1) = P_{B_1}(B_2) \times P(B_1) + P_{C_1}(B_2) \times P(C_1) = 0 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{2}{3} = 0$$

$$c_2 = P(C_2) = P(C_2 \cap B_1) + P(C_2 \cap C_1) = P_{B_1}(C_2) \times P(B_1) + P_{C_1}(C_2) \times P(C_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$$

À l'instant 2, la puce n'a que deux situations possibles *A* ou *C*.

Comme pour l'instant 2, en lisant le tableau 2 ou en lisant l'arbre de probabilité:

$a_3 = P(A_3) = P(A_3 \cap A_2) + P(A_3 \cap C_2) = P_{A_2}(A_3) \times P(A_2) + P_{C_2}(A_3) \times P(C_2) = 0 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{5}{6} = 0$

$b_3 = P(B_3) = P(B_3 \cap A_2) + P(B_3 \cap C_2) = P_{A_2}(B_3) \times P(A_2) + P_{C_2}(B_3) \times P(C_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{5}{6} = \frac{1}{18}$

$c_3 = P(C_3) = P(C_3 \cap A_2) + P(C_3 \cap C_2) = P_{A_2}(C_3) \times P(A_2) + P_{C_2}(C_3) \times P(C_2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{5}{6} = \frac{17}{18}$

2. a. *Montrer que, pour tout entier naturel n,* $a_n + b_n + c_n = 1$ *et* $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2} b_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{3} a_n \end{cases}$.

À l'instant *n*, le système { A_n, B_n, C_n } forme une partition de l'univers (ensemble des possibles), d'où, $a_n + b_n + c_n = 1$.

D'après les données, les événements ($A_{n+1} \cap A_n$) et ($A_{n+1} \cap C_n$) sont vides, d'où,

$$a_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap B_n) + P(A_{n+1} \cap C_n)$$
$$= 0 + P_{B_n}(A_{n+1}) \times P(B_n) + 0 = \frac{1}{2} b_n$$

D'après les données, les événements ($B_{n+1} \cap B_n$) et ($B_{n+1} \cap C_n$) sont vides, d'où,

$$b_{n+1} = P(B_{n+1}) = P(B_{n+1} \cap A_n) + P(B_{n+1} \cap B_n) + P(B_{n+1} \cap C_n)$$
$$= P_{A_n}(B_{n+1}) \times P(A_n) + 0 + 0 = \frac{1}{3} a_n$$

b. *Montrer que, pour tout entier naturel n,* $a_{n+2} = \frac{1}{6} a_n$.

On a alors: $a_{n+2} = \frac{1}{2} b_{n+1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} a_n = \frac{1}{6} a_n$

c*. En déduire que, pour tout entier naturel p,* $\begin{cases} a_{2p} = \left(\frac{1}{6}\right)^p & \text{et} \quad a_{2p+1} = 0 \\ b_{2p} = 0 & \text{et} \quad b_{2p+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^p \end{cases}$

Une méthode:

Posons $u_p = a_{2p}$, d'après le b), $u_{p+1} = a_{2(p+1)} = a_{2p+2} = \frac{1}{6} a_{2p} = \frac{1}{6} u_p$

La suite (u_p) est donc une suite géométrique de premier terme $u_0 = a_0 = 1$ et de raison $\frac{1}{6}$,

donc, $u_p = 1.\left(\frac{1}{6}\right)^p$, soit: $a_{2p} = \left(\frac{1}{6}\right)^p$.

Posons $v_p = a_{2p+1}$, d'après le b), $v_{p+1} = a_{2(p+1)+1} = a_{2p+3} = \frac{1}{6} a_{2p+1} = \frac{1}{6} v_p$

La suite (v_p) est donc une suite géométrique de premier terme $v_0 = a_1 = 0$ et de raison $\frac{1}{6}$,

donc, $v_p = 0.\left(\frac{1}{6}\right)^p$, soit: $a_{2p+1} = 0$.

Comme $b_{2p+1} = \frac{1}{3} a_{2p}$, il vient: $b_{2p+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^p$ et $b_{2p} = \frac{1}{3} a_{2p-1} = \frac{1}{3} \times 0 = 0$

Une autre méthode

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel *p*, $a_{2p} = \left(\frac{1}{6}\right)^p$ et $a_{2p+1} = 0$:

- On a vu que $a_0=1$,donc $a_0=\left(\frac{1}{6}\right)^0$ et $a_1=0$, donc la propriété est vraie pour $p=0$
- Supposons que pour un entier naturel *k*, on ait , $a_{2k}=\left(\frac{1}{6}\right)^k$ et $a_{2k+1}=0$:

  Alors d'après la question 2)b), $a_{2(k+1)}=a_{2k+2}=\frac{1}{6}\times a_{2\mathrm{k}}$ donc $a_{2(k+1)}=\left(\frac{1}{6}\right)\times\left(\frac{1}{6}\right)^k=\left(\frac{1}{6}\right)^{k+1}$

  $$\text{et } a_{2(k+1)+1}=a_{2k+3}=\frac{1}{6}\times a_{2k+1}=\frac{1}{6}\times 0=0$$

- Conclusion : La propriété est vraie pour $p=0$ et elle est "héréditaire" (sur $\mathbb{N}$) ; donc elle est vraie pour tout entier naturel *p*.

***3.** Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Tous les termes de rang impair de la suite (a_n) sont nuls.

Puisque $-1 < \frac{1}{6} < 1$, la suite (a_{2p}) converge vers 0, donc, pour tout intervalle ouvert *I* contenant 0, il existe un entier n_0 tel que $n \geqslant n_0$ implique $a_n \in I$.

Conclusion: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

On admet que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$. Quelle est la limite de c_n lorsque *n* tend vers $+\infty$?

Comme $c_n = 1 - a_n - b_n$, on a: $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 1$

<u>Exercice 4:</u> ***5 points*** ***D'après Bac Pondichéry Avril 2006***

Dix affirmations, réparties en trois thèmes et numérotées de 1.a à 3.c sont proposées ci-dessous. Le candidat portera sur sa copie, en regard du numéro de l'affirmation, et avec le plus grand soin, la mention VRAI ou FAUX.

Dans le cas où l'affirmation est fausse, on justifiera (éventuellement en donnant un contre-exemple, même graphique).

Rappel : Pour montrer que une proposition du type " Si ...A..., alors ...B..." est fausse, un contre-exemple est pertinent si pour cet exemple, A est vérifié et B ne l'est pas.

1. Pour tout réel *x*, e^x désigne l'image de *x* par la fonction exponentielle.

1.a	Pour tous réels *a* et *b*: $(\mathrm{e}^a)^b = \mathrm{e}^{(a^b)}$.	**FAUX**. ***Contre-exemple***: $a = 2$, $b = 0$, $(\mathrm{e}^2)^0 = 1$ et $\mathrm{e}^{(2^0)} = \mathrm{e}$
1.b	Pour tous réels *a* et *b*: $\mathrm{e}^{a-b} = \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$	**VRAI**
1.c	La droite d'équation $y = x + 1$ est la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle en son point d'abscisse 1.	**FAUX**. Une équation de la tangente à $C_{\exp}$ au point d'abscisse 1 est: $y = \mathrm{e}(x - 1) + \mathrm{e} = \mathrm{e}x$ *ou bien* Le point $E(1, \mathrm{e})$ de $C_{\exp}$ n'est pas un point de la droite d'équation $y = x + 1$
1.d	Pour tous réels *a* et *b*: $2\,\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^{2\mathrm{a}} + \mathrm{e}^{2\mathrm{b}}$.	**FAUX**. ***Contre-exemple***: $a = 0$, $b = 1$. $2\,\mathrm{e}^{0+1} = 2\mathrm{e}$ et $\mathrm{e}^{2\times 0} + \mathrm{e}^{2\times 1} = 1 + \mathrm{e}^2$

La négation de "pour tout ..." est "il existe au moins un ..."
En trouvant un contre-exemple, vous donnez au moins un cas où la propriété énoncée est fausse.

Cela ne veut pas dire qu'elle est fausse pour tous réels a et b.
Voici un exemple simple:
Proposition: ***Pour tout x réel, (x – 1)(x – 2) = 0***
Cette proposition est fausse, car, il existe au moins un réel (par exemple: 0), tel que le produit n'est pas nul.
Mais, vous ne pouvez pas écrire: Pour tout x, (x – 1)(x – 2) ≠ 0.

2. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit a un élément de I.

2.a	Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.	**VRAI (Cours)**
2.b	Si f continue est en a, alors f est dérivable en a.	**FAUX**. ***Contre-exemple***: La fonction $x \mapsto \lvert x \rvert$ est continue en 0 et non dérivable en 0.
2.c	Si f est dérivable en a, alors la fonction $h \mapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie en 0.	**VRAI. (Définition du nombre dérivé en *a*)**

3.

3.a	On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$. Si $\lim u_n = +\infty$ et si $\lim v_n = -\infty$ alors $\lim (u_n + v_n) = 0$	**FAUX**. ***Contre-exemple***: La suite (u_n) définie par $u_n = n^2$ et la suite (v_n) définie par $v_n = -n$ vérifient: $\lim u_n = +\infty$ et si $\lim v_n = -\infty$ La suite (w_n) définie par $w_n = u_n + v_n = n^2 - n$ diverge vers $+\infty$
3.b	f et g sont deux fonctions définies sur un voisinage de a. l est un réel. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) \times g(x) = \pm\infty$.	**FAUX**. ***Contre-exemple***: Soit $x > 2$, $f(x) = x - 2$ et $g(x) = \dfrac{1}{2(x-2)}$. On a: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = +\infty$. Or, $f(x) \times g(x) = \dfrac{1}{2}$
3.c	f est une fonction définie sur l'intervalle [1; 5] telle que $f(1) = 2$ et $f(5) = 7$. Si, pour tout $\beta \in [2; 7]$, l'équation $f(x) = \beta$ a une solution sur [1; 5] alors f est continue sur l'intervalle [1; 5]	**FAUX.**