# BAC BLANC Mathématiques Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures Coefficient 7

Le sujet comporte 4 pages

Le candidat doit traiter les quatre exercices. L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies

**EXERCICE 1 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

**(Antilles-Guyanne septembre 2009)**

*Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct* $(O;\vec{u},\vec{v})$ *d'unité graphique 1 cm.*

*Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure des questions.*

*1. Placer les points A, B et C d'affixes respectives* $z_A=-11+4\,\mathrm{i}$ , $z_B=-3-4\,\mathrm{i}$ *et* $z_C=5+4\,\mathrm{i}$.

*2. Calculer le module et un argument du quotient* $\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$ *et en déduire la nature du triangle ABC.*

***Une méthode :***

$\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B} = \dfrac{-11+4\,\mathrm{i}-(-3-4\,\mathrm{i})}{5+4\,\mathrm{i}-(-3-4\,\mathrm{i})} = \dfrac{-8+8\,\mathrm{i}}{8+8\,\mathrm{i}} = \dfrac{\mathrm{i}(8\,\mathrm{i}+8)}{8+8\,\mathrm{i}} = \mathrm{i}$ ***Remarquer***: $-8 = 8\mathrm{i}^2$

i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ; $k \in \mathbb{Z}$

$\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ , soit, $z_A - z_B = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(z_C - z_B)$

On a donc: A est l'image de *C* dans la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ .

Le triangle ABC est un triangle rectangle et isocèle en B.

***Une autre méthode :***

$z_A - z_B = -8 + 8\,\mathrm{i} = 8(-1+\mathrm{i}) = 8\sqrt{2}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$ $z_A - z_B$ a pour module $8\sqrt{2}$ et pour argument $\dfrac{3\pi}{4}$

$z_C - z_B = 8 + 8\,\mathrm{i} = 8(1+\mathrm{i}) = 8\sqrt{2}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ $z_C - z_B$ a pour module $8\sqrt{2}$ et pour argument $\dfrac{\pi}{4}$

Le module du quotient est le quotient des modules et un argument du quotient est la différence des arguments.

$\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$ a pour module $\dfrac{8\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} = 1$ et un argument égal à $\dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\hat{\imath}}{2} + 2k\pi$ ; $k \in \mathbb{Z}$.

*3. Soit E l'image du point C par la rotation* $\mathscr{R}$ *de centre B et d'angle* $\dfrac{\pi}{4}$.

*Montrer que l'affixe de E vérifie* $z_E=-3+(8\sqrt{2}-4)\,\mathrm{i}$.

$z_E - z_B = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\ (z_C - z_B)$

$z_E = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)(5 + 4\mathrm{i} - (-3-4\mathrm{i}) + (-3-4\mathrm{i})$

$z_E = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(8 + 8i) + (-3 - 4i) = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\,i + 4\sqrt{2}\,i - 4\sqrt{2} - 3 - 4i = -3 + (8\sqrt{2} - 4)i$

*Placer le point E.*

On construit le cercle de centre $B$ et passant par $C$.

L'abscisse de $E$ est $-3$.

$E$ est à l'intersection de ce cercle et de la droite d'équation $x = -3$ telle que l'ordonnée soit positive.

*4. Soit D l'image du point E par l'homothétie $\mathcal{H}$ de centre B et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.*

On a donc : $\overrightarrow{BD} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{BE}$

On en déduit : $z_D = \frac{\sqrt{2}}{2}(z_E - z_B) + z_B$

Or, $z_E - z_B = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(8 + 8i)$ (voir calculs du 3/)

$z_D = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(8 + 8i) - 3 - 4i$

$z_D = \frac{1}{2}(1 + i)\times 8\times(1 + i) - 3 - 4i = 4(2i) - 3 - 4i = -3 + 4i$

*Montrer que D est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.*

*Placer le point D .*

$ABC$, étant un triangle rectangle en $B$, le centre du cercle circonscrit est le milieu $I$ de $[AC]$.

$z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{-11+4i+5+4i}{2} = -3 + 4i$

Ce qui prouve le résultat demander.

$D$ est le milieu de $[AC]$

***Remarque :***

Si on a oublié les propriétés du triangle rectangle, on peut calculer :

$DA = |-11+4i-(-3+4i)| = 8$

$DB = |-3-4i-(-3+4i)| = |-8i| = 8$

$DC = |5+4i-(-3+4i)| = 8$

*5.* ***Dans cette question, toute trace de recherche,même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.***

*Soit $\mathcal{D}$ la droite parallèle à la droite (EC) passant par le point D. On note F le point d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et de la droite (BC), I le milieu du segment [EC] et J le milieu du segment [DF].*

*Montrer que B, I et J sont alignés.*

**Une méthode avec l'utilisation de $\mathcal{H}$.**

Soit $K$ l'image de $C$ par l'homothétie $\mathcal{H}$.

Puisque le point $D$ est image de $E$ par l'homothétie $\mathcal{H}$, l'image $K$ de $C$ par $\mathcal{H}$ est sur la parallèle à ($EC$) passant par $D$, soit la droite $\mathscr{D}$.

D'autre part, le centre $B$ de l'homothétie, le point $C$ et son image $K$ sont alignés.

$K$ est donc à l'intersection des droites $\mathscr{D}$ et $(BC)$. $K$ et $F$ sont confondus.

Le segment $[EC]$ a pour image le segment $[DF]$.

Comme une homothétie conserve le milieu, on a :

le milieu $I$ du segment $[EC]$ a pour image le milieu $J$ du segment $[DF]$.

**Une méthode en utilisant les triangles isocèles ...**

D'après le 3/, on sait : $BC = BE$

Dans le triangle $BEC$, la droite $(DF)$ étant parallèle à $(EC)$, on peut appliquer la propriété de Thalès,

d'où, $\dfrac{BD}{BE} = \dfrac{BF}{BC}$

Les triangles $BEC$ et $BDF$ sont par conséquent isocèles en $B$.

Les droites $(BI)$ et $(BJ)$ sont les médianes respectives issues de $B$ dans ces triangles isocèles.

Comme les médianes issues du sommet principal sont aussi des hauteurs, on a : $(BJ) \perp (DF)$ et $(BI) \perp (EC)$.

Comme $(DF)$ et $(EC)$ sont parallèles, les droites $(BI)$ et $(BJ)$ sont confondues.

**Une méthode en utilisant les affixes : (déconseillée ici mais pour l'entraînement aux calculs)**

L'affixe de $I$ milieu de $[EC]$ est : $z_I = \dfrac{5+4i+(-3+(8\sqrt{2}-4)i)}{2} = 1 + 4\sqrt{2}\,i$

Le point $F$ est sur la parallèle à $(EC)$ passant par $D$ et $F \in (BC)$, d'où,

D'après la propriété de Thalès, il existe un réel $k$ tel que $\overrightarrow{BF} = k\,\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD} = k\,\overrightarrow{BE}$ .

$k = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, d'après le 4/,

On a donc :

$$z_F - (-3 - 4i) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(5 + 4i - (-3 - 4)i))$$

$$z_F = \frac{\sqrt{2}}{2}(8 + 8i) - 3 - 4i = 4\sqrt{2} - 3 + 4(\sqrt{2} - 1)i$$

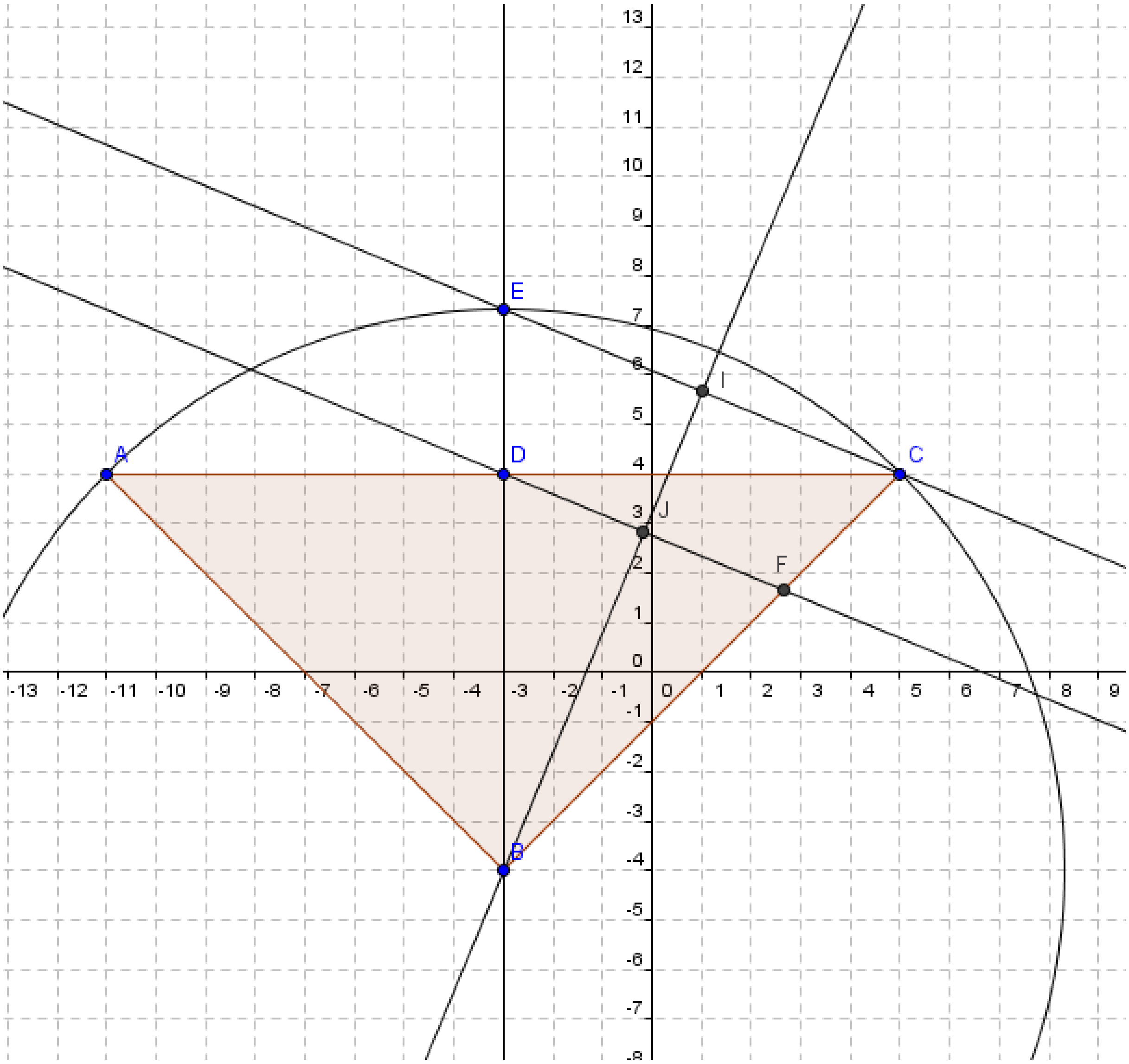
L'affixe de $J$ milieu de $[DF]$ est $z_J = \dfrac{-3+4i+4\sqrt{2}-3+4(\sqrt{2}-1)i}{2} = -3 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,i$

L'affixe de $\overrightarrow{BI}$ est : $z_{\overrightarrow{BI}} = 1 + 4\sqrt{2}\,i - (-3 - 4i) = 4 + 4(\sqrt{2} + 1)i$

L'affixe de $\overrightarrow{BJ}$ est : $z_{\overrightarrow{BJ}} = -3 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,i - (-3 - 4i) = 2\sqrt{2} + 2(\sqrt{2} + 2)i$

En multipliant par $\sqrt{2}$, l'affixe $z_{\overrightarrow{BJ}}$ de $\overrightarrow{BJ}$ , on a : $\sqrt{2}\,(2\sqrt{2} + 2(\sqrt{2} + 2)i) = 4 + 4(1 + \sqrt{2})i = z_{\overrightarrow{BI}}$

On a donc : $\overrightarrow{BJ} = \sqrt{2}\,\overrightarrow{BI}$


A
B
C
D
E
F
I
J

**EXERCICE 2** **3 points** **Commun à tous les candidats**

**(Asie juin 2005)**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On appelle $\mathscr{D}$ la droite d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -3 - t \end{cases}$

et $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $x + 2y - 3z - 1 = 0$.

*Dans chacune des lignes du tableau ci-dessous, une seule affirmation est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la ligne et la lettre correspondant à l'affirmation choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.*

D'après les équations de $\mathscr{D}$ et de $\mathscr{P}$, on a :

un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est : $\vec{t}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et

un vecteur normal à $\mathscr{P}$ est : $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

| Numéro de la ligne | Affirmation A | Affirmation B | Affirmation C |
|---|---|---|---|
| 1. | Le point $M$ de coordonnées $(-1 ; 3 ; 2)$ appartient à $\mathscr{D}$. | Le point $N$ de coordonnées $(2 ; -1 ; -1)$ appartient à $\mathscr{D}$. | Le point $R$ de coordonnées $(3 ; 1 ; -4)$ appartient à $\mathscr{D}$. |
| Commentaires | $\begin{cases} -1 = 1 + 2t \\ 3 = 2 - t \\ 2 = -3 - t \end{cases}$ n'a pas de solution ($t = -1$ et $t = -5$ ) | En posant $t = \frac{1}{2}$, on a : $x = 1$, mais $y \neq -1$ | Lorsque $t = 1$, on a : $x = 3$, $y = 1$ et $z = -4$ |
| 2. | Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(1 ; 2 ; -3)$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. | Le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $(-2 ; 1 ; 1)$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. | Le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(3 ; 1 ; -4)$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. |
| Commentaires | $\vec{u}$ et $\vec{t}$ ne sont pas colinéaires | $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{t}$ <br> $\vec{v} = -\vec{t}$ | $\vec{w}$ et $\vec{t}$ ne sont pas colinéaires |
| 3. | $\mathscr{D}$ est incluse dans $\mathscr{P}$. | $\mathscr{D}$ est strictement parallèle à $\mathscr{P}$. | $\mathscr{D}$ est sécante à $\mathscr{P}$. |
| Commentaires | $\vec{n}\cdot\vec{t} = 3$ <br> $\vec{n}$ et $\vec{t}$ ne sont pas orthogonaux | $\vec{n}\cdot\vec{t} = 3$ <br> $\vec{n}$ et $\vec{t}$ ne sont pas orthogonaux | $\vec{n}\cdot\vec{t} = 3$ |
| | ou encore <br> $(1 + 2t) + 2(2 - t) - 3(-3 - t) - 1 = 0$ a pour unique solution $t = -\frac{13}{3}$. | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ sont sécants en un point ... | | |
| 4. | Le point $G$ de coordonnées (1 ; 3 ; −2) appartient à $\mathscr{P}$ | Le point $G$ de coordonnées (1 ; 3 ; 2) appartient à $\mathscr{P}$ | Le point $G$ de coordonnées (1 ; 3 ; −1) appartient à $\mathscr{P}$ |
| | $1 + 2\times3 - 3\times(-2) - 1 = 12$ | $1 + 2\times3 - 3\times3 + 2 = 0$ | $1 + 2\times3 - 3\times(-1) - 1 = 9$ |
| 5. | Le plan $Q_1$ d'équation cartésienne $x + 2y - 3z + 1 = 0$ est perpendiculaire à $\mathscr{P}$. | Le plan $Q_2$ d'équation cartésienne $4x - 5y - 2z + 3 = 0$ est perpendiculaire à $\mathscr{P}$. | Le plan $Q_3$ d'équation cartésienne $-3x + 2y - z - 1 = 0$ est perpendiculaire à $\mathscr{P}$. |
| Commentaires | $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\cdot\vec{n}_1 = 14$ | $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\cdot\vec{n}_2 = 0$ | $\vec{n}_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\cdot\vec{n}_3 = 4$ |
| 6. | La distance du point $T$ de coordonnées (−1 ; −3 ; 2) au plan $\mathscr{P}$ est : $\sqrt{14}$ | La distance du point $T$ de coordonnées (−1 ; −3 ; 2) au plan $\mathscr{P}$ est : 14 | La distance du point $T$ de coordonnées (−1 ; −3 ; 2) au plan $\mathscr{P}$ est : $2\sqrt{3}$ |
| Commentaires | $d = \dfrac{\lvert -1+2\times(-3)-3\times2-1\rvert}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}}$ $= \dfrac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$ | | |

**EXERCICE 3** **5 points** ***Commun à tous les candidats***

***(Amérique du Nord juin 2009)***

*Dans cet exercice on étudie une épidémie dans une population.*

**Partie A : Étude de la progression de l'épidémie pendant 30 jours**

*Au début de l'épidémie on constate que 0,01 de la population est contaminé. Pour t appartenant à [0 ; 30], on note y(t) le pourcentage de personnes touchées par la maladie après t jours.*

*On a donc y(0) = 0,01. On admet que la fonction y ainsi définie sur [0 ; 30] est dérivable, strictement positive et vérifie : y' = 0,05y(10 – y)*

*1. On considère la fonction z définie sur l'intervalle [0 ; 30] par* $z = \dfrac{1}{y}$.

*Démontrer que la fonction y satisfait aux conditions* $\begin{cases} y(0)=0{,}01 \\ y'=0{,}05\,y(10-y) \end{cases}$ *si et seulement si la fonction z satisfait aux conditions* $\begin{cases} z(0)=100 \\ z'=-0{,}5\,z+0{,}05 \end{cases}$

***Sens direct:***

On sait d'après l'énoncé $y > 0$. Par conséquent $y \neq 0$.

Soit $y$ vérifiant $\begin{cases} y(0)=0{,}01 \\ y'=0{,}05\,y(10-y) \end{cases}$

$z = \dfrac{1}{y}$ d''où, $z' = \dfrac{-y'}{y^2}$. On en déduit: $y' = -y^2 z' = -\dfrac{z'}{z^2}$

On a alors: $z(0) = \dfrac{1}{y(0)} = 100$ et, $-\dfrac{z'}{z^2} = 0{,}05\times \dfrac{1}{z} \times(10 - \dfrac{1}{z}) = 0{,}05\times \dfrac{1}{z^2} \times(10z - 1)$

En multipliant les deux membres de l'égalité par $z^2$, il vient: $-z' = 0{,}05\,(10z - 1) = 0{,}5z - 0{,}05$

La fonction $z$ vérifie bien: $\begin{cases} z(0)=100 \\ z'=-0{,}5\,z+0{,}05 \end{cases}$.

***Sens réciproque:***

Soit $z$ vérifiant $\begin{cases} z(0)=100 \\ z'=-0{,}5\,z+0{,}05 \end{cases}$ $z = \dfrac{1}{y}$, d'où, $y = \dfrac{1}{z}$

On a alors $y(0) = \dfrac{1}{z(0)} = 0{,}01$ et $\dfrac{-y'}{y^2} = -0{,}5\,\dfrac{1}{y} + 0{,}05$.

En multipliant les deux membres de l'égalité par $y^2$, il vient: $-y' = -0{,}5y + 0{,}05y^2 = 0{,}05y(-10 + y)$

La fonction $y$ vérifie bien: $\begin{cases} y(0)=0{,}01 \\ y'=0{,}05\,y(10-y) \end{cases}$

**L'équivalence est démontrée.**

***(Il est possible de rédiger directement l'équivalence)***

*2. a. En déduire une expression de la fonction z puis celle de la fonction y.*

La fonction $z$ vérifie une équation différentielle de la forme $z' = az + b$.

Les solutions sont donc les fonctions $z(t) = C\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} - \dfrac{0{,}05}{-0{,}5} = C\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} + 0{,}1$.

Comme $z(0) = 100$, on a: $100 = C\,\mathrm{e}^{0} + 0{,}1$, d'où, $C = 100 - 0{,}1 = 99{,}9$.

$z(t) = 99{,}9\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} + 0{,}1$

$$y(t) = \frac{1}{z(t)} = \frac{1}{99{,}9\,e^{-0{,}5t}+0{,}1} = \frac{10}{999\,e^{-0{,}5t}+1}$$

*b. Calculer le pourcentage de la population infectée après 30 jours. On donnera la valeur arrondie à l'entier le plus proche.*

Le pourcentage de la population infectée après 30 jours est la valeur $y(30) = \dfrac{1}{99{,}9\times e^{-0{,}5\times 30}+0{,}1}$

Une valeur approchée donnée par la calculatrice est 9,996 ...

L'entier le plus proche est 10.

10 % de la population est touchée par la maladie après 30 jours.

**Partie B : Étude sur l'efficacité d'un vaccin**

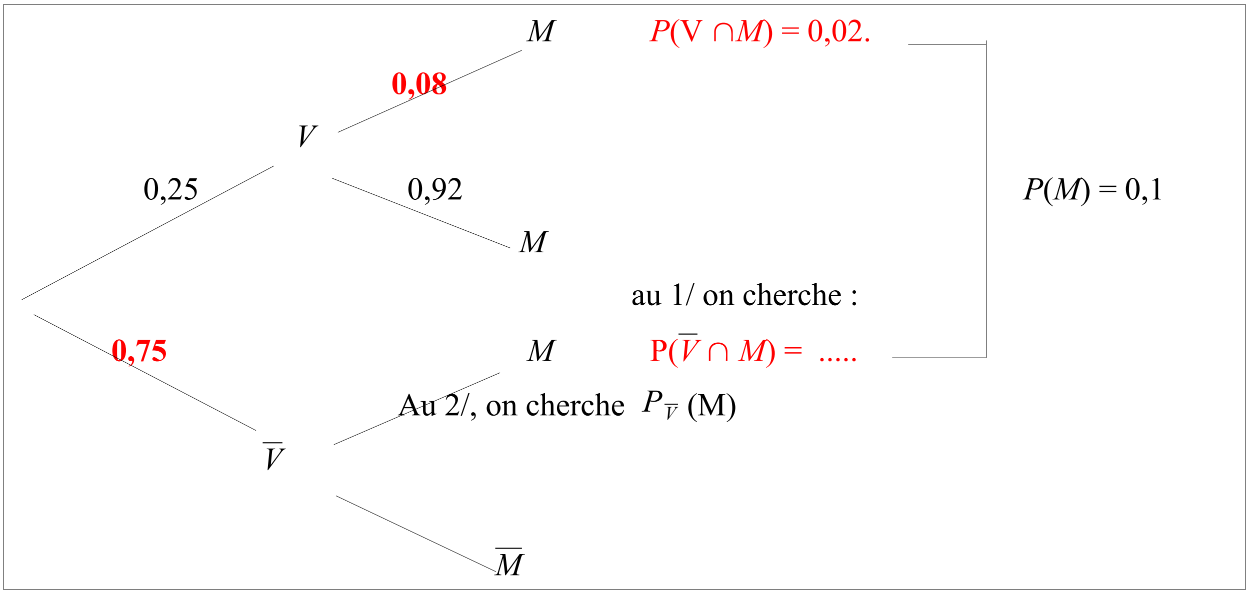
*Dans cette partie, toute trace de recherche,même incomplète, ou d'initiative,même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

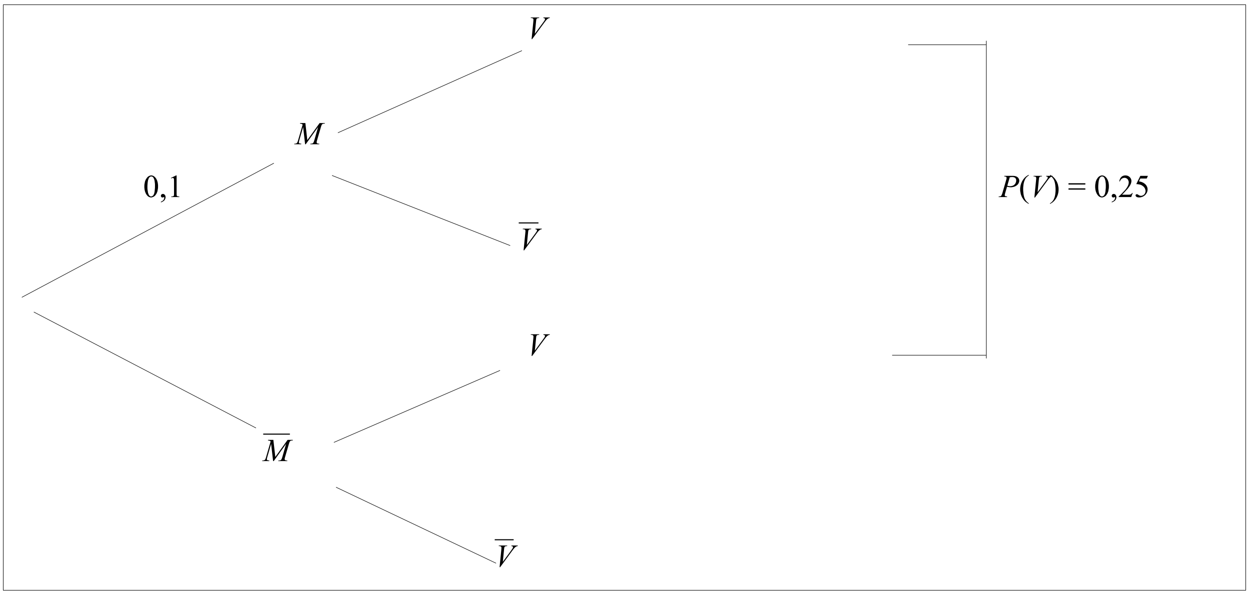
*Le quart de la population est vacciné contre cette maladie contagieuse. De plus, on estime que sur la population vaccinée, 92 % des individus ne tombent pas malades. Sur la population totale, on estime aussi que 10 % des individus sont malades.*

*On choisit au hasard un individu dans cette population.*

On note $M$ "être malade" et "$V$"être vacciné"

(Faire un arbre et penser à la partition des individus Malades en deux groupes: Malades et Vaccinés, Malades et non Vaccinés)






Tableau

| | $V$ | $\overline{V}$ | Total |
|---|---|---|---|
| $M$ | $P(M \cap V) = 0,25 - 0,23 = 0,02$ | On cherche $P(M \cap \overline{V})$ $0,1 - 0,02 = 0,08$ | 0,1 |
| $\overline{M}$ | $0,25 \times 0,92 = 0,23$ | | 0,9 |
| Total | 0,25 | 0,75 | 1 |

*1. Montrer que la probabilité de l'évènement « l'individu n'est pas vacciné et tombe malade » est égale à 0,08.*

On cherche donc: $P(M \cap \overline{V})$

On sait: $P(M) = 0,1$ et $P(M \cap V) = 0,25 \times (1 - 0,92) = 0,25 \times 0,08 = 0,02$

Or, $M = (M \cap V) \cup (M \cap \overline{V})$, avec, $(M \cap V) \cap (M \cap \overline{V}) = \emptyset$ (Partition)

$P(M \cap \overline{V}) = 0,1 - 0,02 = 0,08$

*2. Quelle est la probabilité de tomber malade pour un individu qui n'est pas vacciné ?*

On cherche $P_{\overline{V}}(M) = \dfrac{P(M \cap \overline{V})}{P(\overline{V})} = \dfrac{0,08}{0,75} = \dfrac{8}{75}$

---

**EXERCICE 4** **7 points** **Commun à tous les candidats**

**(Nouvelle Calédonie novembre 2010)**

***PARTIE A : restitution organisée de connaissances***

*On suppose connus les résultats suivants :*

*Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle [a ; b] avec a < b*

⋆ *si, pour tout $x \in [a ; b]$, $u(x) \geqslant 0$ alors* $\displaystyle\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$

★ $\int_a^b [u(x)+v(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$

★ $\int_a^b \alpha u(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x$ *où α est un nombre réel.*

*Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle [a ; b] avec a < b*

*et si pour tout x de [a ; b], f (x) ⩽ g (x) alors :* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

$f$ et $g$ étant continues sur [$a$ ; $b$], leur différence $g - f$ est continue sur cet intervalle.
Pour tout $x$ de [$a$ ; $b$], on a : $f(x) \leqslant g(x)$, d'où, $g(x) - f(x) \geqslant 0$.
Or $g(x) - f(x) = (g - f)(x)$
D'après la première propriété rappelée :
$\int_a^b (g-f)(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$, d'où, $\int_a^b [g(x)-f(x)]\,\mathrm{d}x \geqslant 0$
D'après la deuxième propriété :
$\int_a^b [g(x)-f(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x$
D'après la deuxième propriété :
$\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ .
Finalement : $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
Conclusion :
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

***PARTIE B :***

*Soit ϕ la fonction définie sur l'intervalle [1 ; +∞[ par ϕ(x) = 1 + x² – 2x² lnx*

*1. a. Étudier le sens de variation de la fonction ϕ sur l'intervalle [1 ; +∞[.*

ϕ est dérivable sur [1 ; +∞[ et,

pour tout $x \geqslant 1$, on a : $\phi'(x) = 0 + 2x - 2(2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x}) = -4x \ln x$

Comme $x > 1$, on a : $\ln x > 0$ et $-4x \ln x < 0$.
$\phi'(1) = 0$
La fonction ϕ est strictement décroissante sur [1 ; +∞[ puisque sa dérivée est strictement négative sauf en 1 où elle s'annule..

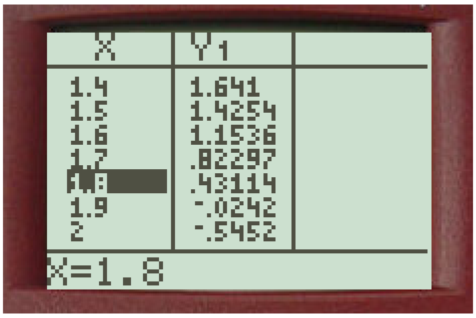
*b. Calculer ϕ(e). Démontrer que l'équation ϕ(x) = 0 admet une unique solution α sur l'intervalle [1 ; e]. Déterminer un encadrement de α d'amplitude $10^{-1}$.*

Comme ln e= 1 , on a :$\phi(e) = 1 + e^2 - 2e^2 = 1 - e^2$
$1 - e^2 < 0$.
Comme ϕ strictement décroissante $\phi(x) \leqslant \phi(e) < 0$ pour $x \geqslant e$.
ϕ ne s'annule pas sur [e ; +∞[}

Comme ln 1 = 0, on a :$\phi(1) = 1 + 1^2 = 2$
ϕ est continue sur [1 ; e]
ϕ est strictement décroissante sur [1 ; e]
$0 \in [\phi(e) ; \phi(1)]$
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\phi(x) = 0$ admet une et une seule solution

$\alpha \in [1 ; +\infty[$

À la calculatrice, on lit :




$\phi(1{,}8) \approx 0{,}43$ et $\phi(1{,}9) \approx -0{,}024$

$1{,}8 < \alpha < 1{,}9$ est un encadrement de la solution d'amplitude $10^{-1}$

*c. Déterminer le signe de $\phi(x)$ suivant les valeurs de $x$.*

Si $1 \leqslant x < \alpha$ , on a : $\phi(x) > \phi(\alpha)$ car $\phi$ strictement décroissante.

Si $\alpha < x$ , on a : $\phi(x) < \phi(\alpha)$ car $\phi$ strictement décroissante.

Conclusion :

$\phi(x) > 0$ sur $[1 ; \alpha[$
$\phi(x) < 0$ sur $]\alpha ; +\infty[$
$\phi(\alpha) = 0$

***Bilan :***

| *x* | 1 | | α | | e | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\phi'(x)$ | | | | | | – | |
| $\phi(x)$ | 2 | | 0 | | $1-e^2$ | | |
| *Signe de* $\phi(x)$ | | + | 0 | | | – | |

*2. Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$ .*

*On note $f'$ la fonction dérivée de $f$.*

*a. Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout $x \geqslant 1$ on a : $f'(x) = \dfrac{\phi(x)}{x(1+x^2)^2}$ .*

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times(1+x^2)-2x\times\ln x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2x^2\ln x}{x(1+x^2)^2} = \frac{\phi(x)}{x(1+x^2)^2}$$

*b. Déduire de la question 1. le sens de variation de la fonction $f$ sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.*

Comme $x \geqslant 1$ et $(1+x^2)^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $\phi(x)$.

Conclusion :

$f$ est strictement croissante sur sur $[1 ; \alpha]$
$f$ est strictement décroissante sur sur $[\alpha ; +\infty[$

*c. Démontrer que pour tout $x$ appartenant à l'intervalle $[1 ; +\infty[$ on a : $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\ln x}{x^2}$ .*

***Une méthode :***

$f(x) \geqslant 0$ car : $x \geqslant 1$ implique $\ln x \geqslant 0$ et, $1 + x^2 > 0$

D'autre part, $1 + x^2 \geqslant x^2 > 0$, d'où, $\dfrac{1}{1+x^2} \leqslant \dfrac{1}{x^2}$

En multipliant chaque membre par $\ln x$ **positif**, il vient : $\dfrac{\ln x}{1+x^2} \leqslant \dfrac{\ln x}{x^2}$

***Autre méthode :***

Pour comparer deux expressions, on étudie le signe de leur différence :

$f(x) \geqslant 0$ car : $x \geqslant 1$ implique $\ln x \geqslant 0$ et, $1 + x^2 > 0$

Soit $d(x) = \dfrac{\ln x}{x^2} - \dfrac{\ln x}{1+x^2}$

$d(x) = \dfrac{(1+x^2)\times\ln x - x^2\times\ln x}{x^2(1+x^2)} = \dfrac{\ln x}{x^2(1+x^2)}$

Comme $x \geqslant 1$, $\ln x \geqslant 0$

On obtient $d(x) \geqslant 0$, soit : $\dfrac{\ln x}{1+x^2} \leqslant \dfrac{\ln x}{x^2}$

*d. En déduire* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

On sait (croissances comparées) que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$

D'après le théorème des gendarmes, on en déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

*3. a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que* $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}$.

On pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x^2}$

On a alors : $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = -\dfrac{1}{x}$.

Les fonctions $u$ et $v$ sont dérivables sur [1 ; e] et leurs dérivées sont continues.

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\ln x\left(-\frac{1}{x}\right)\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{\mathrm{e}} - 0 + \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Or, $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\mathrm{e}} = -\frac{1}{\mathrm{e}} - (-1) = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$.

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\mathrm{e}} + 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}.$$

*b. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f, dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.*

*Soit $\mathscr{A}$ l'aire exprimée en cm² du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation x = 1 et x = e.*

*Déterminer un encadrement de $\mathscr{A}$.*

***$0 \leqslant f(x)$***

Une mesure de $\mathscr{A}$ en cm² (u.a.) est $\int_1^e f(x)\,\mathrm{d}\,x$

Comme $f(x) \leqslant \dfrac{\ln x}{x^2}$, $\int_1^e f(x)\,\mathrm{d}\,x \leqslant \int_1^e \dfrac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}\,x$

d'où, $0 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 1 - \dfrac{2}{e}$.