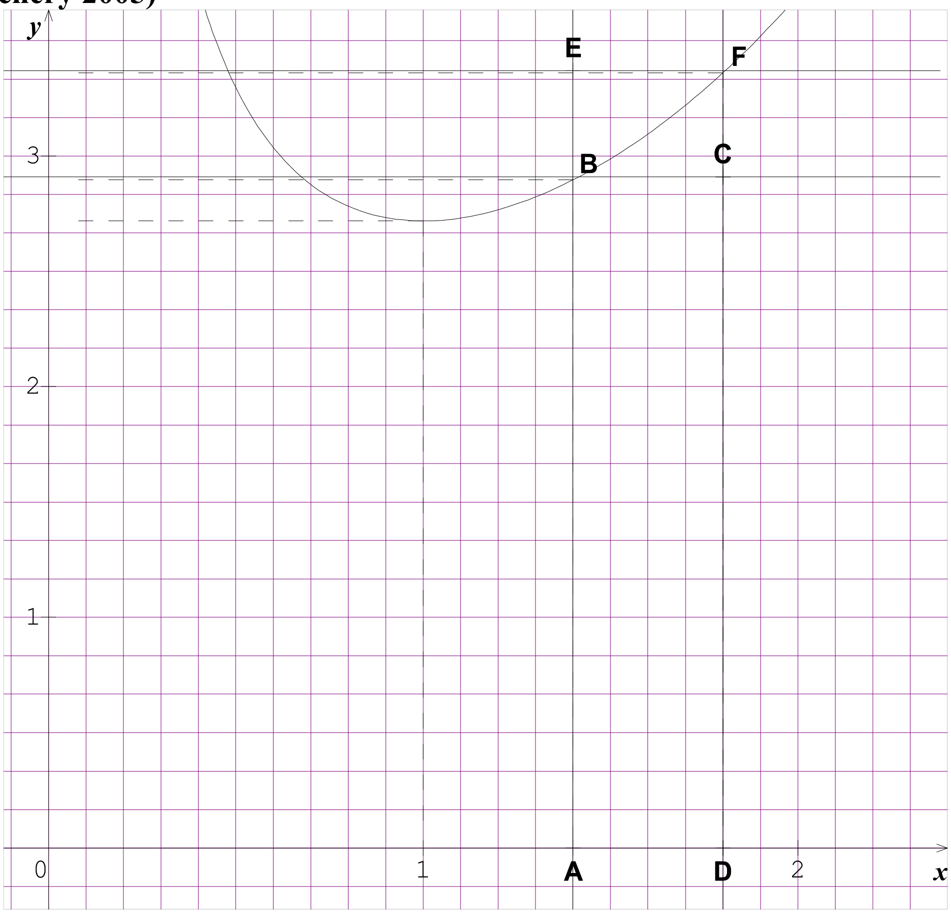
Exercice 1 (Pondichéry 2005)



1 a) *f* définie sur $I=[1\,;+\infty[$ par $f(t)=\dfrac{e^t}{t}$ est continue, car, elle est le **produit** de deux *fonctions continues* sur **l'intervalle** *I*, $t\mapsto e^t$ et $t\mapsto\dfrac{1}{t}$

b) *f*, étant le produit de deux fonctions dérivables sur *I* est dérivable sur *I* et $f'(t)=\dfrac{e^t}{t}+\dfrac{-1}{t^2}e^t=e^t\dfrac{t-1}{t^2}$

$f'(t)>0$ sur $]1\,;+\infty[$ et $f'(1)=0$. Par conséquent, *f* est strictement croissante sur *I*

2 a) $A(1)=0$ car $x_0=1$. Les droites d'équations $x=x_0$ et $x=1$ sont confondues.

b) *h* étant strictement positif et *f* croissante sur *I*, pour x_0 de *I*, on a: $x_0\le t\le x_0+h$ et $f(x_0)\le f(t)\le f(x_0+h)$

Le rectangle délimité par les points $A(x_0;0), B(x_0;f(x_0)), C(x_0+h;f(x_0))$ et $D(x_0+h;0)$ est donc situé sous la courbe et a pour aire $f(x_0)\cdot h$

Le rectangle délimité par les points $A(x_0;0), E(x_0;f(x_0+h)), F(x_0+h;f(x_0+h))$ et $D(x_0+h;0)$ est donc situé au-dessus de la courbe et a pour aire $f(x_0+h)\cdot h$

L'aire du domaine délimité par les droites d'équation $x=x_0$, $x=x_0+h$, l'axe des abscisses et la courbe C_f vaut: $A(x_0+h)-A(x_0)$, d'où, $f(x_0)\cdot h\le A(x_0+h)-A(x_0)\le f(x_0+h)\cdot h$

et comme $h>0$, on obtient: $f(x_0)\le\dfrac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h}\le f(x_0+h)$

c) Lorsque $h<0$ et $x_0+h>1$, on a: $x_0\ge t\ge x_0+h$, d'où, $f(x_0)\ge f(t)\ge f(x_0+h)$

Le rectangle délimité par les points $A(x_0;0), B(x_0;f(x_0)), C(x_0+h;f(x_0))$ et $D(x_0+h;0)$ est donc situé au-dessus de la courbe et a pour aire $f(x_0)\cdot(-h)$

Le rectangle délimité par les points $A(x_0;0), E(x_0;f(x_0+h)), F(x_0+h;f(x_0+h))$ et $D(x_0+h;0)$ est donc situé sous la courbe et a pour aire $f(x_0+h)\cdot(-h)$

L'aire du domaine délimité par les droites d'équation $x=x_0$, $x=x_0+h$, l'axe des abscisses et la courbe C_f vaut: $A(x_0)-A(x_0+h)$, d'où, $f(x_0+h)\cdot(-h)\leq A(x_0)-A(x_0+h)\leq f(x_0)\cdot(-h)$

et comme $(-h)>0$, on obtient: $f(x_0+h)\leq\dfrac{A(x_0)-A(x_0+h)}{(-h)}\leq f(x_0)$

L'inégalité devient: $f(x_0+h)\leq\dfrac{A(x_0+h)-A(x_0)}{(h)}\leq f(x_0)$

d) ***f* étant continue**, on a: $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(x_0+h)=f(x_0)$ et $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} f(x_0+h)=f(x_0)$

Par conséquent, en appliquant le théorème des gendarmes:

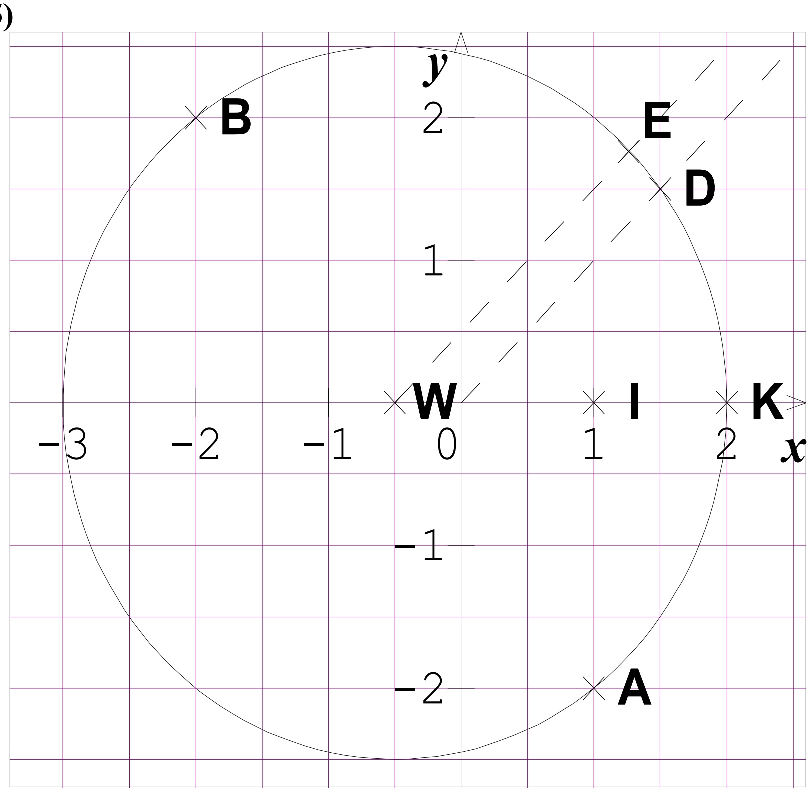
$\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \dfrac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h}=f(x_0)$ d'après b), et ,d'après c) $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \dfrac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h}=f(x_0)$

La fonction *A* est donc dérivable en x_0 et le nombre dérivé de *A* en x_0 est $A'(x_0)=f(x_0)$

e) Ceci étant vrai pour tout x_0 de *I*, on obtient $A'=f$

A est donc la primitive de *f* qui s'annule en 1.

Exercice 2 (Pondichéry 2005)



1. Le cercle (*C*) de diamètre [*AB*] a pour centre le point Ω milieu de [*AB*] et d'affixe $\omega=\dfrac{z_A+z_B}{2}=-\dfrac{1}{2}$

Le rayon vaut $\dfrac{|z_B-z_A|}{2}=\dfrac{|-3-4\,i|}{2}=\dfrac{\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}}{2}=\dfrac{5}{2}$

2) $z_D=\dfrac{3+9\,i}{4+2\,i}=\dfrac{(3+9\,i)(4-2\,i)}{(4+2\,i)(4-2\,i)}=\dfrac{30+30\,i}{20}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}i$ *Remarquer: D est sur la droite d'équation y = x*

$|z_D-\omega|=\left|\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}i-(\dfrac{-1}{2})\right|=\left|2+\dfrac{3}{2}i\right|=\sqrt{4+\dfrac{9}{4}}=\dfrac{5}{2}$ donc $D\in(C)$

Placer le point D à l'intersection de la bissectrice de (xOy) et du cercle (C).

3) a) *E*, étant sur le cercle (*C*), on a: $|z_E-\omega|=\dfrac{5}{2}$, d'où, $\left|z_E+\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{5}{2}$

Une mesure de $(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega E})$ étant $\frac{\pi}{4}$, on a $arg(\frac{z_E-\omega}{z_I-\omega})=\frac{\pi}{4}$ d'où $arg(z_E+\frac{1}{2})=\frac{\pi}{4}$ car, $z_I-\omega$ est un réel strictement positif.

Placer le point E à l'intersection de la demi-droite d'origine Ω , d'angle polaire $\pi/4$ et de (C)

b) D'après 3a), $z_E+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{5}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)=\frac{5\sqrt{2}}{4}+\frac{5\sqrt{2}}{4}i$

On obtient: $z_E=\frac{5\sqrt{2}}{4}+\frac{5\sqrt{2}}{4}i-\frac{1}{2}=\frac{5\sqrt{2}-2}{4}+\frac{5\sqrt{2}}{4}i$

4) *r* est l'application définie par: $r(M)=M'$ avec $z'+\frac{1}{2}=e^{i\frac{\pi}{4}}(z+\frac{1}{2})$ où *z* et *z'* sont les affixes respectives de *M* et *M'*;

a) On peut écrire: $z'-\omega=e^{i\frac{\pi}{4}}(z-\omega)$. On en déduit: $r(\Omega)=\Omega$

$|z'-\omega|=|e^{i\frac{\pi}{4}}(z-\omega)|=|e^{i\frac{\pi}{4}}||z-\omega|$, soit $\Omega M'=\Omega M$ car $|e^{i\frac{\pi}{4}}|=1$

et $arg(z'-\omega)=arg\,e^{i\frac{\pi}{4}}(z-\omega)=arg(e^{i\frac{\pi}{4}})+arg(z-\omega)$

d'où, $arg(z'-\omega)-arg(z-\omega)=arg\frac{z'-\omega}{z-\omega}=arg(e^{i\frac{\pi}{4}})$

On en déduit:une mesure en radians de $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'})=\frac{\pi}{4}$

r est donc la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$

b) *K* est le point d'affixe 2 d'où *r(K)* a pour affixe *k'* telle que $k'+\frac{1}{2}=e^{i\frac{\pi}{4}}(2+\frac{1}{2})$

On retrouve le calcul du 3a), $k'=z_E$. $r(K)=E$

K est un point du cercle (*C*) sur l'axe des réels positifs, on a donc: $\overrightarrow{\Omega K}$ et $\overrightarrow{\Omega I}$ sont colinéaires de même sens et une mesure de $(\overrightarrow{\Omega K}, \overrightarrow{\Omega E})$ est $\frac{\pi}{4}$

Le centre de rotation de *r* étant le centre du cercle (*C*), l'image de *K* est le point de (*C*) tel que $(\overrightarrow{\Omega K}, \overrightarrow{\Omega r(K)})$ vaut $\frac{\pi}{4}$. On a bien: $r(K)=E$

Exercice 3 (Pondichéry 2005)

1 a) $A(1;0;2), B(1;1;4), C(-1;1;1)$ d'où $\overrightarrow{AB}(0;1;2)$ et $\overrightarrow{AC}(-2;1;-1)$

Il suffit de remarquer que la proportionnalité entre les coordonnées n'est pas vérifiée: $\frac{0}{2}\neq\frac{1}{1}$ pour prouver que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Les points A, B, C ne sont pas alignés (ils définissent donc un plan)

b) $\vec{n}(3;4;-2)$

Calculons: $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=3\times0+4\times1+(-2)\times2=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=3\times(-2)+4\times1+(-2)\times(-1)=0$

Les produits scalaires étant nuls, $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ d'une part, $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AC}$ d'autre part sont orthogonaux.

$\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (*ABC*)

Soit $M(x;y;z)$ un point du plan (*ABC*), on a: $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0$, d'où, $3\times(x-1)+4\times(y-0)+(-2)\times(z-2)=0$

Une équation de (*ABC*) est $3x+4y-2z+1=0$

2 a) $(P_1): 2x+y+2z+1=0$ et $P_2: x-2y+6z=0$

Soient $\vec{n_1}$ un vecteur normal à $P_1: \vec{n_1}(2;1;2)$ et $\vec{n_2}$ un vecteur normal à $P_2: \vec{n_2}(1;-2;6)$

Comme $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-2}$, $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ ne sont pas colinéaires. Les plans P_1 et P_2 sont donc sécants.
Leur intersection est une droite (D)
Soit $M(x;y;z)$ un point commun à P_1 et P_2 (*M* est un point de (*D*)). Ses coordonnées vérifient les deux équations: $\begin{cases} 2x+y+2z+1=0 \quad (1) \\ x-2y+6z=0 \quad (2) \end{cases}$
Posons $x=\alpha$ et exprimons *y* et *z* en fonction de α .
En faisant $3(1)-(2)$, on tire: $5x+5y+3=0$, d'où, $y=-\alpha-\frac{3}{5}$
En faisant $2(1)+(2)$, on tire: $5x+10\ z+2\ =0$ d'où $z=\frac{-1}{2}\alpha-\frac{1}{5}$

Un système d'équations paramétriques de (*D*) est $\begin{cases} x=\alpha \\ y=-\alpha-\frac{3}{5} \\ z=\frac{-1}{2}\alpha-\frac{1}{5} \end{cases}$

b) Un vecteur directeur de (*D*) est donc: $\vec{u}\left(1;-1;-\frac{1}{2}\right)$

Or, $\vec{n}\cdot\vec{u}=3\ \times 1\ +4\ \times(-1)+(-2)\times(\frac{-1}{2})=0$ (*D*) n'est donc pas sécante au plan (*ABC*)

Le point $E\left(0;-\frac{3}{5};-\frac{1}{5}\right)$ est un point commun à (*D*) ($\alpha=0$) et au plan (*ABC*) car, $3\ \times 0\ +4\ \times\left(\frac{-3}{5}\right)-2\ \times\left(\frac{-1}{5}\right)+1\ \neq 0$ La droite (*D*) n'est pas incluse dans le plan (*ABC*)
(*D)* est strictement parallèle au plan (*ABC*)
3 a) $t\geq 0$, *G* est le barycentre du système $\{(A,1),(B,2),(C,t)\}$
L'existence de *G* est assurée par le fait que t étant positif ou nul, la somme $1\ +2\ +t$ est strictement positive.
Les coordonnées de *I* barycentre du système $\{(A,1),(B,2),\}$ sont:
$x_I=\frac{1.x_A+2.x_B}{1+2}$, $y_I=\frac{1.y_A+2.y_B}{1+2}$, $z_I=\frac{1.z_A+2.z_B}{1+2}$
On trouve $I\left(1;\frac{2}{3};\frac{10}{3}\right)$.
D'après la loi d'associativité des barycentres, *G* est le barycentre du système $\{(I,3),(C,t)\}$,d'où, $\vec{IG}=\frac{t}{3+t}\vec{IC}$

Soit $f:t\mapsto\frac{t}{3+t}$ définie sur $[0;+\infty[$ On a: $f(t)=\frac{3+t-3}{3+t}=1\ -\frac{3}{3+t}$
f est donc une fonction continue, strictement croissante définie sur $[0;+\infty[$. *f* est donc une bijection de $[0;+\infty[$ sur $\left[f(0);\lim_{t\to+\infty}f(t)\right[=[0;1[$

On vient de montrer que lorsque *t* parcourt l'intervalle des réels positifs (0 inclus), le nombre $\frac{t}{1+t}$ parcourait l'intervalle $[0;1[$ fermé en 0, ouvert en 1. Tous les points du segment [*IC*] sauf *C* sont donc atteints.
L'ensemble des points *G* est donc le segment [*IC*] privé de *C*.
Le milieu *J* de [*IC*] est confondu avec *G* lorsque $\frac{t}{3+t}=\frac{1}{2}$, donc, lorsque $t=3$
(Il suffit de faire l'égalité des coefficients de *I* et *C* pour que *G* soit l'isobarycentre des points *I* et *C*)

Exercice 4 (Pondichéry 2005)

La suite (u_n) est définie par $\dfrac{n^{10}}{2^n}$

1) Pour n entier naturel **non nul**, $u_{n+1} \leq 0{,}95\ u_n$ équivaut à $\dfrac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}} \leq 0{,}95\ \dfrac{n^{10}}{2^n}$

Comme $\dfrac{n^{10}}{2^n}$ est **strictement positif**, on a: $u_{n+1} \leq 0{,}95\ u_n$ équivaut à $\dfrac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}} \times \dfrac{2^n}{n^{10}} \leq 0{,}95$

On obtient: $u_{n+1} \leq 0{,}95\ u_n$ équivaut à $\dfrac{(n+1)^{10}}{2 \cdot n^{10}} \leq 0{,}95$

par conséquent: $u_{n+1} \leq 0{,}95\ u_n$ équivaut à $\dfrac{(n+1)^{10}}{n^{10}} \leq 1{,}9$

Or $\dfrac{(n+1)^{10}}{n^{10}} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{10} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{10}$ Ce qui prouve le résultat demandé: $u_{n+1} \leq 0{,}95\ u_n$ équivaut à $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{10} \leq 1{,}9$

2) a) f est la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{10}$

f est la composée de $u : x \mapsto 1+\dfrac{1}{x}$ suivie de $v : x \mapsto x^{10}$.

Comme u est strictement décroissante sur $[1\,;+\infty[$ à valeurs dans $]1\,;2\,]$ et que v est strictement croissante sur les réels positifs, on en déduit que f est strictement décroissante sur $[1\,;+\infty[$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = 1$ et que $\lim\limits_{x\to 1} x^{10} = 1$ (continuité des fonctions puissances), on obtient: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{10} = 1$ (limite de fonctions composées)

On peut calculer la dérivée de f sur pour chercher la variation de f. On a: $f'(x) = 10 \times \dfrac{-1}{x^2} \times \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^9$ *, car, f, étant de la forme* u^n *a pour dérivée* $nu'u^{n-1}$

b) f est la composée de deux fonctions continues, elle est donc continue sur $[1\,;+\infty[$

f est strictement décroissante sur $[1\,;+\infty[$

f réalise donc une bijection de $[1\,;+\infty[$ vers $\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\,; f(1)\right] =]1\,;2^{10}\,] =]1\,;1024\,]$

Comme $1{,}9 \in]1\,;1024\,]$, il existe un réel unique α de $[1\,;+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 1{,}9$

c) La calculatrice donne: $f(15) \approx 1{,}906$ à 10^{-3} près et $f(16) \approx 1{,}833$ *à* 10^{-3} près, d'où, $15 \leq \alpha \leq 16$

d) f étant décroissante sur $[1\,;+\infty[$, $n \geq 16$ implique $f(n) \leq f(16)$

Or, $f(n) = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{10}$ et $f(16) \leq f(\alpha)$.

Conclusion: *si* $n \geq 16$ alors $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{10} \leq 1{,}9$

3 a) Comparons u_n et u_{n+1} pour $n \geq 16$.

Les termes étant strictement positifs, comparons $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1

Or, d'après 1) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 0{,}95$ équivaut à $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{10} \leq 1{,}9$

D'après 2 d) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1{,}9$ est vérifiée lorsque $n \geq 16$

Finalement: si $n \geq 16$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 0{,}95 < 1$, la suite (u_n) est donc strictement décroissante.

b) Or, (u_n) est minorée par 0, donc, (u_n) est une suite convergente.

4) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 16.
$P(n): 0 \leq u_n \leq 0{,}95^{n-16} u_{16}$
Tous les termes u_n sont positifs par définition de u_n .
Il reste à montrer: $u_n \leq 0{,}95^{n-16} u_{16}$
* $n=16$, $u_{16}=\frac{16^{10}}{2^{16}}$ est positif et $0{,}95^{16-16} u_{16}=u_{16}$. P(16) est vérifiée
** Soit un entier $p \geq 16$. On suppose P(p) vraie, d'où, $u_p \leq 0{,}95^{p-16} u_{16}$ (Hypothèse de récurrence)
Or, au 3a), on a vu: si $n \geq 16$ alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 0{,}95$, d'où, $u_{p+1} \leq 0{,}95\ u_p$
Comme $0{,}95 > 0$, on obtient: $0{,}95 . u_p \leq 0{,}95 \times 0{,}95^{p-16} u_{16}$.
Finalement: $u_{p+1} \leq 0{,}95\ u_p \leq 0{,}95^{(p+1)-16} u_{16}$ P(p+1)
On a montré: Si P(p) alors P(p+1)
*** D'après l'axiome de récurrence, la proposition P(n) est vraie pour tout entier naturel supérieur ou égal à n
Comme $0 < 0{,}95 < 1$, la suite $\left(0{,}95^{n-16}\right)$ converge vers 0 et le théorème des gendarmes permet de conclure: (u_n) converge vers 0