**Exercice 1 :**

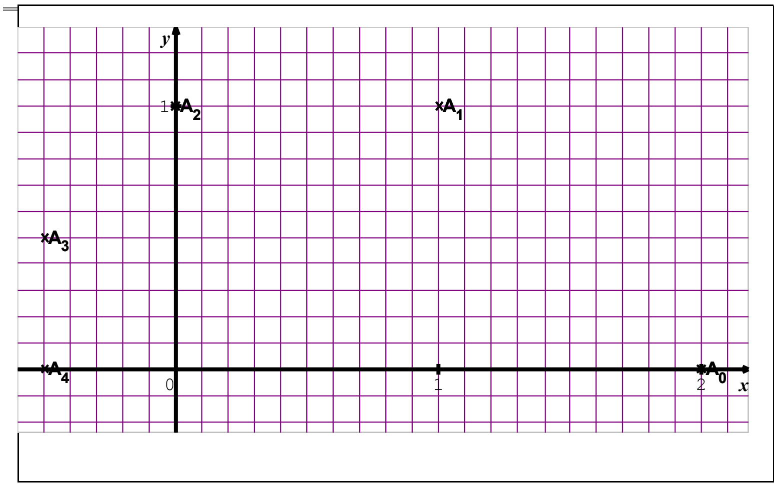
| | | | |
|---|---|---|---|
| 1a) | pour tous réels *a* et *b*: $(e^a)^b = e^{(a^b)}$ | **Faux** | Contre-exemple: $a=2$ , $b=3$ donne $e^6$ et $e^8$ |
| 1b) | pour tous réels *a* et *b*: $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$ | **Vrai** | Voir cours |
| 1c) | La droite d'équation $y=x+1$ est la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle en son point d'abscisse 1 | **Faux** | Le nombre dérivé en 1 est e; La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation: $y=e(x-1)+e=e\,x$. La droite d'équation $y=x+1$ est tangente au point d'abscisse 0 et d'ordonnée 1 |

2)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2a) | Si *f* est dérivable en *a* alors *f* est continue en *a* | **Vrai** | voir cours |
| 2b) | Si *f* est continue en *a* alors *f* est dérivable en *a* | **Faux** | Contre-exemple: La fonction valeur absolue est continue et non dérivable en 0 |
| 2c) | Si *f* est dérivable en *a*, alors la fonction $h \mapsto \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie en 0 | **Vrai** | voir cours, définition du nombre dérivé en *a* |

3)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3a) | Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$ | **Faux** | Contre-exemple: $u_n = 4n$ et $v_n = -n$ |
| 3b) | Si $(u_n)$ converge vers un réel non nul et si $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors la suite $(u_n \times v_n)$ ne converge pas | **Vrai** | Deux cas selon le signe de la limite *l* **non nulle** de $(u_n)$. Si $l<0$ alors le produit diverge vers $-\infty$ , si $l>0$ , le produit diverge vers $+\infty$ |
| 3c) | Si $(u_n)$ converge vers un réel non nul, si $(v_n)$ est positive et si $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ ne converge pas. | **Vrai** | Comme au 3b) |
| 3d) | si $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge | **Faux** | Si $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors la suite diverge |




**Exercice 2 :**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ . Unité graphique 5 cm.
On pose $z_0=2$ et, pour tout entier naturel *n*, $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$ . On note $A_n$ le point du plan d'affixe $z_n$ .

1) $z_1 = 1+i$ , $z_2 = i$ , $z_3 = \frac{-1+i}{2}$ , $z_4 = \frac{-1}{2}$ .

$z_4$ est bien in réel. Figure

2) Pour tout entier naturel *n*, on pose $u_n = |z_n|$ , on a donc,

$u_{n+1}=|z_{n+1}|=\left|\frac{1+\mathrm{i}}{2}z_n\right|=\left|\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right||z_n|=\frac{\sqrt{2}}{2}u_n=\frac{1}{\sqrt{2}}u_n$

La suite ($u_n$) est donc une suite géométrique de premier terme $u_0=|z_0|=2$ et de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

On en déduit $u_n=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ d'après la propriété des suites géométriques: $u_n=u_k\,q^{n-k}$

3) $A_n$ appartient au disque de centre O et de rayon 0,1 si et seulement si $u_n<0{,}1$

Or, $2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n<0{,}1\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n<0{,}05\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)<\ln 0{,}05\Leftrightarrow n>\frac{\ln 0{,}05}{\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$ (Propriétés utiles: ln strictement croissante et $\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)<0$ )

L'entier $n_0$ immédiatement supérieur à $\frac{\ln 0{,}05}{\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$ est 9 La calculatrice donne $u_8=0{,}125$ et $u_9\approx 0{,}08$

$A_n$ appartient au disque de centre O et de rayon 0,1 si et seulement si $n\geqslant 9$

4) a) Pour tout entier naturel *n*, $\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}=\frac{\frac{1+\mathrm{i}}{2}z_n-z_n}{\frac{1+\mathrm{i}}{2}z_n}=\frac{1+\mathrm{i}-2}{1+\mathrm{i}}=\frac{(-1+\mathrm{i})\times(1-\mathrm{i})}{2}=-\frac{(1-\mathrm{i})^2}{2}=\mathrm{i}$

Or, l'affixe de $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$ est $z_{n+1}-z_n$ et celle de $\overrightarrow{OA_{n+1}}$ est $z_{n+1}$ .

D'après l'égalité précédente, on a: $\frac{A_{n+1}A_n}{OA_{n+1}}=1$ et $(\overrightarrow{OA_{n+1}};\overrightarrow{A_nA_{n+1}})=\arg(\mathrm{i})=\frac{\pi}{2}\mod(2\pi)$

$OA_nA_{n+1}$ est donc un triangle **rectangle isocèle direct** en $A_{n+1}$

b) Par définition $l_n=A_0A_1+A_1A_2+\ldots+A_{n-1}A_n$

Puisque les triangles sont isocèles, on a: $l_n=OA_1+OA_2+\ldots+OA_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$

On a donc la somme de *n* termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme $u_1=\sqrt{2}$ et de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

$$l_n=\sqrt{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{2}{\sqrt{2}-1}\times\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}^n}\right)\quad\text{et}\quad\lim_{n\to+\infty}l_n=\frac{2}{\sqrt{2}-1}=2\sqrt{2}+2$$

---

**<u>Exercice 3 :</u>**

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

**Partie A**

Soit *a*, *b*, *c* et *d* des réels tels que $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ et *P* le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$

$I(x_I;y_I,z_I)$ et $\vec{n}(a,b,c)$ (est donc un vecteur normal à *P*)

1) $M(x,y,z)\in\Delta$ droite passant par *I* et orthogonale à *P* si et seulement si $\overrightarrow{IM}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.

Par conséquent, $M(x,y,z)\in\Delta$ si et seulement si, il existe un réel *t* tel que $\overrightarrow{IM}=t\vec{n}$

On obtient: $\begin{cases}x=x_I+ta\\ y=y_I+tb\\ z=z_I+tc\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ système d'équations paramétriques de $\Delta$

2) Soit *H* le point d'intersection de $\Delta$ et *P*.

a) Puisque $I$ et $H$ sont sur $\Delta$ et que $\Delta$ est orthogonale à $P$ alors $\overrightarrow{IH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires. Il existe donc un réel $k$ tel que $\overrightarrow{IH}=k\vec{n}$

b) Comme $H\in P$ les coordonnées de $H$ vérifient l'équation de $P$, d'où, $ax_H+by_H+cz_H+d=0$ ,

d'autre part, d'après 1), $\begin{cases} x_H=x_I+ka \\ y_H=y_I+kb \\ z_H=z_I+kc \end{cases}$

On a alors: $ax_H+by_H+cz_H+d=a(x_I+ka)+b(y_I+kb)+c(z_I+kc)+d=0$

On en déduit: $k(a^2+b^2+c^2)=ax_I+by_I+cz_I+d$ , et, comme $(a+b+c)\neq 0$ , $a^2+b^2+c^2\neq 0$ , d'où,

$k=\dfrac{ax_I+by_I+cz_I+d}{a^2+b^2+c^2}$

c) Comme $\overrightarrow{IH}=k\vec{n}$ , on a: $\|\overrightarrow{IH}\|=|k|\|\vec{n}\|$ , soit, $IH=|k|\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ , d'où, d'après b),

$IH=\dfrac{|ax_I+by_I+cz_I+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

**Autre démonstration**

Soit $A$ un point quelconque de P. Le produit scalaire $\overrightarrow{AI}\cdot\vec{n}=(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HI})\vec{n}=0+\overrightarrow{IH}\cdot\vec{n}$ , car, $\overrightarrow{AH}\perp\vec{n}$ .

$\overrightarrow{AI}\cdot\vec{n}=a(x_I-x_A)+b(y_I-y_A)+c(z_I-z_A)=ax_I+by_I+cz_I-(ax_A+by_A+cz_A)$ . Comme $A\in P$ , on a: $ax_A+by_A+cz_A+d=0$ . On obtient: $\overrightarrow{AI}\cdot\vec{n}$ = $ax_I+by_I+cz_I+d$

D'autre part, $\overrightarrow{IH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, d'où, $|\overrightarrow{IH}\cdot\vec{n}|=\|\overrightarrow{IH}\|\cdot\|\vec{n}\|$

On en déduit: $IH=\dfrac{|ax_I+by_I+cz_I+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

**Partie B**

Le plan $Q$ d'équation $x-y+z-11=0$ est tangent à une sphère $S$ de centre $\Omega(1;-1;3)$.

1) Soit $H$ le point de tangence du plan $Q$ à $S$. Le rayon de la sphère est $r=\Omega H$ et d'après la partie A),

(avec $\Omega=I$) $r=\dfrac{|1\times 1-1\times(-1)+1\times 3-11|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$

2) En appliquant la partie A) 1), il vient: $\begin{cases} x=1+t \\ y=-1-t \quad t\in\mathbb{R} \\ z=3+t \end{cases}$

3) Comme $H\in Q\cap\Omega$ , on a: $(1+t)-(-1-t)+(3+t)-11=0$ .

On a alors: $t=2$ , puis en reportant dans le système obtenu en 2), $H(3;-3;5)$

Complément (non demandé dans cet exercice). Une équation de $S$ est $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=(2\sqrt{3})^2=12$

$x^2+y^2+z^2-2x+2y-6z-1=0$ . Évidemment les coordonnées de $H$ vérifient cette équation.

---

**Exercice 4 :**

**partie A**

*f* est une fonction dérivable, strictement positive sur $[0;+\infty[$ et solution de $(E): y'=\dfrac{-1}{20}y(3-\ln y)$ et $f(0)=1$ (car, l'effectif initial est 1 millier).

1) Démonstration de l'équivalence: (i) ⇔ (ii)

(i) *f* est une fonction dérivable, strictement positive sur $[0;+\infty[$ , vérifie, pour tout $t$ de $[0;+\infty[$ ,

$f'(t)=\dfrac{-1}{20}f(t)(3-\ln(f(t)))$

(ii) $g=\ln(f)$ vérifie, pour tout $t$ de $[0;+\infty[$ , $g'(t)=\dfrac{1}{20}g(t)-\dfrac{3}{20}$

(i) ⇒ (ii)

Comme *f* est strictement positive sur $[0;+\infty[$ , $g=\ln(f)$ est définie sur $[0;+\infty[$

Comme *f* est dérivable sur $[0;+\infty[$ , alors *g* est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $g'=\frac{f'}{f}$

Comme *f* vérifie, pour tout *t* de $[0;+\infty[$ , $f'(t)=\frac{-1}{20}f(t)(3-\ln f(t))$ et que $f(t)$ est non nul, on a:

$g'(t)=\frac{f'(t)}{f(t)}=\frac{-1}{20}(3-\ln f(t))=\frac{1}{20}g(t)-\frac{3}{20}$

(ii) ⇒ (i)

Comme $g=\ln(f)$ est définie et dérivable sur $[0;+\infty[$ , *f* est définie, dérivable et strictement positive sur $[0;+\infty[$ et $f'=f\times g'$

Comme pour tout *t* de $[0;+\infty[$ , $g'(t)=\frac{1}{20}g(t)-\frac{3}{20}$ , on a:

$f'(t)=f(t)\times g'(t)=\frac{1}{20}f(t)(g(t)-3)=\frac{-1}{20}f(t)(3-\ln(f(t)))$

L'équivalence est démontrée

2) L'équation différentielle $(H):z'=\frac{1}{20}z-\frac{3}{20}$ a pour solution les fonctions $t\mapsto Ce^{\frac{1}{20}t}+3$ où $C\in\mathbb{R}$ (voir cours)

3) D'après l'équivalence du 1), une solution *f* de $(E)$ est telle que ln (*f*) est solution de $(H)$ .

On a donc: $\ln(f(t))=Ce^{\frac{1}{20}t}+3$ où $C\in\mathbb{R}$ . En appliquant la fonction exp (bijection réciproque de la fonction ln), on a: $f(t)=\exp\left(Ce^{\frac{1}{20}t}+3\right)$ où $C\in\mathbb{R}$ .

4) Remarque: Comme $f(0)=1$ , on trouve $C=-3$ ( $f(0)=1\Leftrightarrow Ce^0+3=0\Leftrightarrow C=-3$ )

$f(t)=\exp\left(3-3\,\mathrm{e}^{\frac{1}{20}t}\right)$

a) $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{20}t}=+\infty$ d'où $\lim\limits_{t\to+\infty}(3-3\,\mathrm{e}^{\frac{1}{20}t})=-\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=0$

b) *f* est de la forme $\mathrm{e}^u$ et *u* est de la forme $\mathrm{e}^v$ , d'où, $u'(t)=v'(t)\times\mathrm{e}^{v(t)}$ et

$f'(t)=u'(t)\times\mathrm{e}^{u(t)}=u'(t)\times f(t)$

$f'(t)=-3\times\frac{1}{20}\mathrm{e}^{\frac{1}{20}t}\times f(t)$

Comme $f(t)>0$ et $\mathrm{e}^{\frac{1}{20}t}>0$, $f'(t)<0$ et *f* est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$

c) Résolution de $f(t)<0{,}02$ (Notion utile: ln bijection réciproque strictement croissante de l'exponentielle)

$\exp\left(3-3\,\mathrm{e}^{\frac{1}{20}t}\right)<0{,}02 \Leftrightarrow 3-3\,\mathrm{e}^{\frac{1}{20}t}<\ln 0{,}02 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\frac{1}{20}t}>\frac{3-\ln 0{,}02}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{20}t>\ln\left(\frac{3-\ln 0{,}02}{3}\right) \Leftrightarrow$

$t>20\times\ln\left(\frac{3-\ln 0{,}02}{3}\right)$

$f(t)<0{,}02 \Leftrightarrow t\in\left]20\times\ln\left(\frac{3-\ln 0{,}02}{3}\right);+\infty\right[$ Remarque: $\ln 0{,}02=-\ln 50$

Une valeur approchée de $20\times\ln\left(\frac{3-\ln 0{,}02}{3}\right)$ est 16,7 à 0,1 près par excès.

La taille de l'échantillon sera inférieure à 20 individus, soit, 0,02 milliers d'individus au bout de 17 ans.

**Partie B**

1) D'après l'énoncé $\mathrm{P}(\mathrm{M})=0{,}5$ , $\mathrm{P}_{\mathrm{M}}(\mathrm{T})=0{,}99$ , $\mathrm{P}_{\bar{\mathrm{M}}}(\mathrm{T})=0{,}001$

Voir arbre pondéré

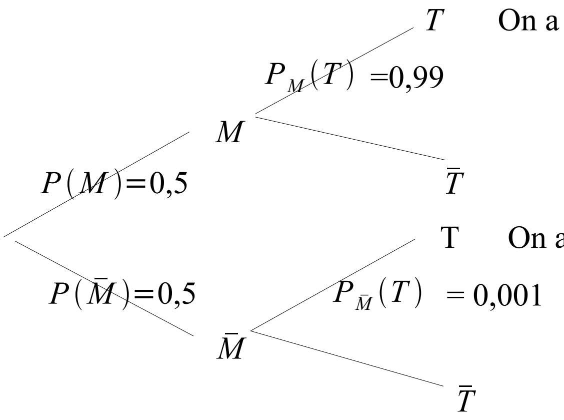
2) $\mathrm{P}(\mathrm{T})=\mathrm{P}(\mathrm{M}\cap\mathrm{T})+\mathrm{P}(\bar{\mathrm{M}}\cap\mathrm{T})=\mathrm{P}_{\mathrm{M}}(\mathrm{T})\times\mathrm{P}(\mathrm{M})+\mathrm{P}_{\bar{\mathrm{M}}}(\mathrm{T})\times\mathrm{P}(\bar{\mathrm{M}})$

$\mathrm{P}(\mathrm{T})=\frac{1}{2}(0{,}99+0{,}001)=0{,}4995$

3) On cherche $P_T(M)$ $\quad P_T(M)=\dfrac{P(M\cap T)}{P(T)}=\dfrac{\frac{1}{2}\times 0{,}99}{\frac{1}{2}\times 0{,}991}=\dfrac{990}{991}$

Or, une valeur approchée de $\dfrac{990}{991}$ est 0, 9989, d'où, $P_T(M)<0{,}999$

Le test n'est pas fiable.




On a donc: $P(M\cap T)=0{,}5\times 0{,}99$

On a donc: $P(\bar{M}\cap T)=0{,}5\times 0{,}001$

**Exercice de spécialité**

**1.** La transformation *f* est de la forme $z'=az+b$ avec $a\in\mathbb{C}$, $b\in\mathbb{C}$ : *f* est donc une similitude directe.

Cherchons son centre Ω invariant par *f* : $z_\Omega=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)z_\Omega+1 \iff z_\Omega=1+\mathrm{i}$

Le centre de la similitude est donc Ω d'affixe $1+\mathrm{i}$.

Son rapport $k=\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right|=\sqrt{2}\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ Son angle $\theta=\arg\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)=\frac{\pi}{4}$

(On a donc: $z'-(1+\mathrm{i})=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}(z-(1+i))$ *f* est la composée de la rotation *r* de centre *Ω*, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de l'homothétie h de centre *Ω* et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ )

**2. a.** $A_n+1=f(A_n)$ avec $A_0=O$

$A_0=O$ d'affixe 0, $A_1$ d'affixe 1, $A_2$ d'affixe $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$ , $A_3$ d'affixe $\frac{3}{2}+i$

**b.** On a $u_n=\Omega A_n=|z_n-z_\Omega|$

Or d'après la question 1., $z_{n+1}-z_\Omega=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}(z_n-z_\Omega)$ d'où, $u_{n+1}=|z_{n+1}|-z_\Omega=\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\right||(z_n-z_\Omega)|=\frac{1}{\sqrt{2}}u_n$

Cette égalité montre que la suite $(u_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , de premier terme $u_0=\sqrt{2}$ (diagonale d'un carré de côté 1).

Il en résulte que $u_n=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

**c.** D'après l'expression de $u_n$ , tous les termes de la suite sont non nuls et *(u<sub>n</sub>)* est une suite décroissante (suite géométrique de raison q telle que 0 < q < 1)

Donc s'il existe $n_0$ tel que $u_{n_0}<0{,}1$ , tous les termes successifs vérifieront aussi cette inégalité.

$u_n < 0{,}1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n < 0{,}1 \qquad \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < \ln\left(\frac{0{,}1}{\sqrt{2}}\right)$

Remarquer: $\ln 0{,}1 = -\ln 10$ $\qquad \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\ln\sqrt{2} = -\frac{1}{2}\ln 2$ $\qquad$ On obtient: $n > 2\ln\frac{10}{\ln}2+1 \qquad n_0=8$

Conclusion: le premier point appartenant au disque de centre Ω et de rayon 0,1 est le point $A_8$ .

**3. a.** Le triangle $\Omega A_0 A_1$ est clairement rectangle isocèle en $A_1$ .

Démontrons par récurrence que le triangle $\Omega A_n A_{n+1}$ est rectangle isocèle en $A_{n+1}$ :

– La propriété est initialisée pour $n = 0$.

– Supposons que le triangle $\Omega A_{n-1} A_n$ soit rectangle isocèle en $A_n$ . Or le triangle $\Omega A_n A_{n+1}$ est l'image par la similitude du triangle $\Omega A_{n-1} A_n$ : il est donc de même nature, soit rectangle isocèle en $A_{n+1}$ .

La démonstration par récurrence est achevée.

**b.** D'après la question précédente , $l_n = A_0 A_1 + A_1 A_2 + \ldots + A_{n-1} A_n = \Omega A_1 + \Omega A_2 + \ldots \Omega A_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ soit la somme de $n$ termes consécutifs en commençant à $u_1$ d'une suite géométrique ....

On a alors: $l_n = 1 \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \ldots$ qui converge vers $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = 2+\sqrt{2}$