Index

78 page 96 1
Partie A. Étude d'une fonction auxiliaire.....1
Partie B. Étude d'une fonction f.....1
Partie C; Étude d'une suite de rapports de distances.....4
Exercice E page 317 .Nouvelle–Calédonie novembre 2000.....4

78 page 96

(Correction: Partie C, la suite (un) est définie par $u_n = \dfrac{C_n B_n}{C_n A_n}$)

Partie A. Étude d'une fonction auxiliaire

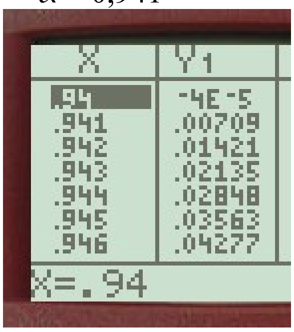
La fonction g est définie sur ℝ par: $g(x) = 2e^x + 2x - 7$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ (aucun problème de calculs …)

b) g est la somme de fonctions dérivables sur ℝ.

$g'(x) = 2e^x + 2$ qui est strictement positif pour tout x réel, donc, g est strictement croissante sur ℝ.
c) g est dérivable sur ℝ, donc, g est continue sur ℝ.
g est strictement croissante sur ℝ.
g réalise ainsi une bijection de ℝ dans $]\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) ; \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)[=]-\infty; +\infty[= g(\mathbb{R})$.

Comme $0 \in g(\mathbb{R})$, il existe un et un seul antécédent à 0 par g.
L'équation $g(x) = 0$ a une et une seule solution α dans ℝ.
Comme $g(0{,}94) < 0 < g(0{,}941)$, il vient: $0{,}94 < \alpha < 0{,}941$



Conséquence:
g s'annule en changeant de signe en α
Si $x < \alpha$ alors $g(x) < 0$
Si $x > \alpha$ alors $g(x) > 0$

Partie B. Étude d'une fonction f

La fonction f est définie sur ℝ par $f(x) = (2x - 5)(1 - e^{-x})$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
a) *f (x)* est un **produit** de deux facteurs, d'où, l'étude du signe de chaque facteur résumé dans un tableau de signes.

x	$-\infty$		0		$5/2$		$+\infty$
$2x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$1-e^{-x}$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) **Limite en $-\infty$.**

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2x-5 = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$, d'où, $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-e^{-x} = -\infty$.

D'après la limite d'un produit, on a: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Limite en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-5 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, d'où, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-e^{-x} = 1$

D'après la limite d'un produit, on a: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

c) f est le produit de …. et de …..

Ne pas oublier que la dérivée de la fonction composée e^u est $(e^u)' = u'e^u$

$x \mapsto 2x-5$ a pour dérivée $x \mapsto 2$

$x \mapsto 1-e^{-x}$ a pour dérivée $x \mapsto -(-1)e^{-x} = e^{-x}$

$f'(x) = 2(1-e^{-x}) + (2x-5)e^{-x} = 2x e^{-x} - 7e^{-x} + 2$

Comme $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$, on a: $f'(x) = \dfrac{2x-7+2e^x}{e^x} = \dfrac{g(x)}{e^x}$.

Comme $e^x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

D'après le Ad), si $x < \alpha$, $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$, $g(x) > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

d) $f(\alpha) = (2\alpha-5)(1-e^{-\alpha}) = (2\alpha-5)\left(\dfrac{e^{\alpha}-1}{e^{\alpha}}\right)$

or, α est l'unique réel tel que $2e^{\alpha} + 2\alpha - 7 = 0$

Donc, $e^{\alpha} = \dfrac{7-2\alpha}{2}$ et $e^{\alpha}-1 = \dfrac{7-2\alpha}{2} - 1 = \dfrac{5-2\alpha}{2}$,

soit, $\left(\dfrac{e^{\alpha}-1}{e^{\alpha}}\right) = \left(\dfrac{5-2\alpha}{2}\right)\left(\dfrac{2}{7-2\alpha}\right) = \dfrac{5-2\alpha}{7-2\alpha} = \dfrac{2\alpha-5}{2\alpha-7}$

d'où, $f(\alpha) = (2\alpha-5)\left(\dfrac{2\alpha-5}{2\alpha-7}\right) = \dfrac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$

2) Soit h définie sur $D_h = \left]-\infty; \dfrac{5}{2}\right[$ par $h(x) = \dfrac{(2x-5)^2}{2x-7}$

Remarquer: $\alpha \in D_h$ et $h(\alpha) = f(\alpha)$

$h'(x) = \dfrac{2\times2(2x-5)(2x-7)-2(2x-5)^2}{(2x-7)^2} = \dfrac{(2x-5)\left[4(2x-7)-2(2x-5)\right]}{(2x-7)^2} = \dfrac{(2x-5)(4x-18)}{(2x-7)^2}$

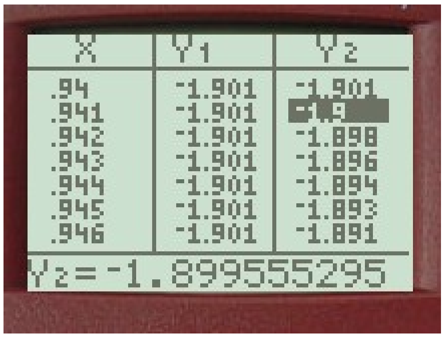
$$= \frac{2(2x-5)(2x-9)}{(2x-7)^2}$$

Sur D_h , on sait: $2x - 5 < 0$ et $2x - 9 < 0$, d'où, $h'(x) > 0$ et h est une fonction strictement croissante sur D_h .

Encadrement de $f(\alpha)$ (ou $h(\alpha)$)

Comme $f(\alpha)$ est le minimum de f, on a: $f(\alpha) < f(0{,}94)$ et $f(\alpha) < f(0{,}941)$

Comme h strictement croissante, on a: $h(0{,}94) < h(\alpha) < h(0{,}941)$



Méthode pour encadrer $f(\alpha)$.

On choisit la valeur par défaut de la borne inférieure $h(0{,}94)$ avec deux décimales (puisqu'on demande un encadrement d'amplitude 10^{-2})

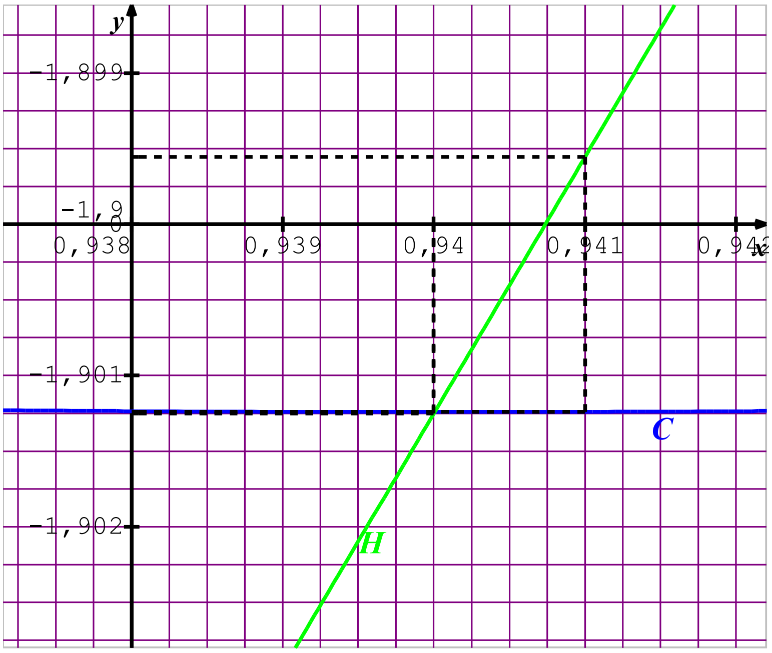
et on prend la valeur par excès du minimum des majorants de $f(\alpha)$ (les majorants sont: $f(0{,}94)$, $f(0{,}941)$, $h(0{,}941)$)

On a donc: $-1{,}91 < f(\alpha)$

La calculatrice donne, $f(0{,}94) < -1{,}90$ et $f(0{,}941) < -1{,}90$ et $h(0{,}94) < -1{,}89$.

Conclusion: $-1{,}91 < f(\alpha) < -1{,}90$

Un zoom



ou encore:

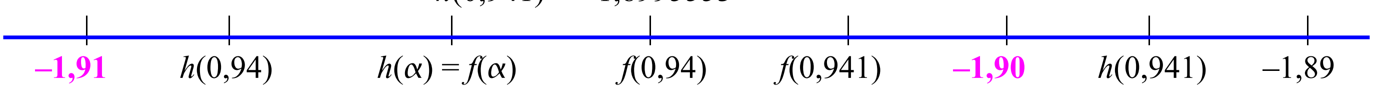
voici les **positions relatives** des nombres sur l'axe des réels (les écarts réels ne sont pas conservés)

Valeurs approchées avec 7 décimales: $f(0{,}94) \approx -1{,}9012412$

$f(0{,}941) \approx -1{,}9012398$

$h(0{,}94) \approx -1{,}9012500$

$h(0{,}941) \approx -1{,}8995553$



e) On pose $d(x) = f(x) - (2x - 5) = (2x - 5)(1 - e^{-x}) - (2x - 5) = -(2x - 5)\,e^{-x}$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$, la droite D d'équation $y = 2x - 5$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

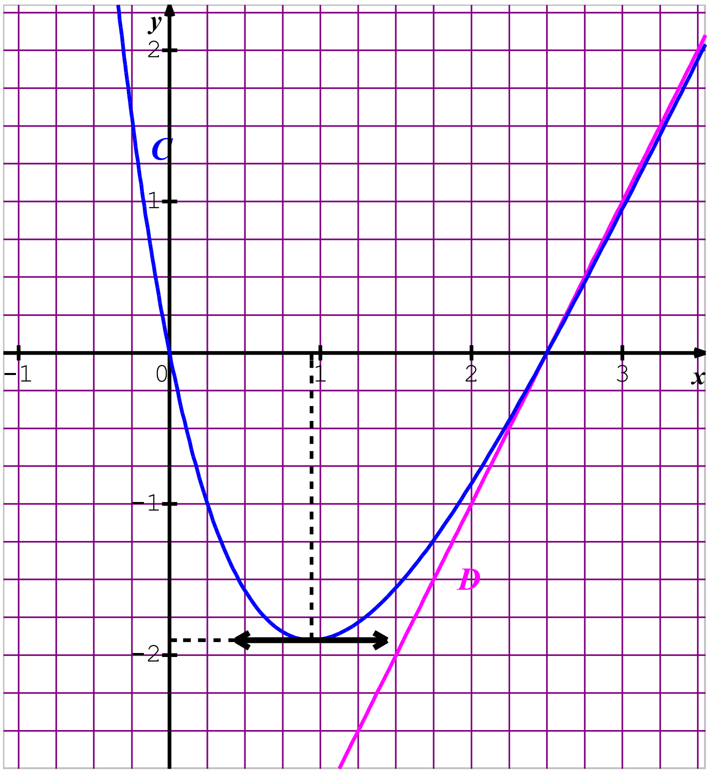
Comme pour tout x réel, $e^{-x} > 0$, $d(x)$ est du signe opposé à $2x - 5$, d'où,

la droite D d'équation $y = 2x - 5$ est strictement au-dessous de $\mathscr{C}$ lorsque $x < \dfrac{5}{2}$

la droite D d'équation $y = 2x - 5$ est strictement au-dessus de $\mathscr{C}$ lorsque $x > \dfrac{5}{2}$

la droite D d'équation $y = 2x - 5$ coupe $\mathscr{C}$ au point de coordonnées $\left(\dfrac{5}{2}; 0\right)$

f) Graphique (unité 2cm)



Partie C; Étude d'une suite de rapports de distances.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a:

A_n d'abscisse n sur l'axe des abscisses, donc, $A_n(n; 0)$

B_n d'abscisse n sur la droite D, donc, $B_n(n; 2n - 5)$

C_n d'abscisse n sur la courbe $\mathscr{C}$, donc, $C_n(n, f(n)) = (n; (2n - 5)(1 - e^{-n})$

$u_n = \dfrac{C_n B_n}{A_n B_n}$

a) D'après l'étude précédente, $C_nB_n = 2n - 5 - f(n)$ car, D au-dessus de $\mathscr{C}$ lorsque $n \geqslant 3$.
et $A_nB_n = 2n - 5 - 0 = 2n - 5$

On a donc: $u_n = \dfrac{2n-5-f(n)}{2n-5} = \dfrac{(2n-5)(1-(1-e^{-n}))}{2n-5} = e^{-n} = (e^{-1})^n = \left(\dfrac{1}{e}\right)^n$

La suite (u_n) est donc une suite géométrique de premier terme $u_3 = e^{-3}$ et de raison $\dfrac{1}{e}$.

b) Puisque $-1 < \dfrac{1}{e} < 1$, la suite (u_n) converge vers 0.

Le résultat était prévisible puisque C_nB_n est l'écart entre l'asymptote et la courbe et que A_nB_n tend vers l'infini puisque la droite D représente une fonction affine croissante.

Exercice E page 317 .Nouvelle–Calédonie novembre 2000

1.a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$.

discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = -4 = 4i^2 = (2\,i)^2$

Les solutions dans $\mathbb{C}$ sont donc les complexes conjugués: $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 1 + i$

Préciser le module et un argument de chacune des solutions.

$|1-i| = |1+i| = \sqrt{2}$ et **un** argument θ_1 de z_1 est $-\dfrac{\pi}{4}$ et θ_2 de z_2 est $\theta_2 = -\theta_1 = \dfrac{\pi}{4}$.

Écriture exponentielle des solutions: $z_1 = \sqrt{2}\ e^{-i\pi/4}$ et $z_2 = \sqrt{2}\ e^{i\pi/4}$

b. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation

$(-iz + 3i + 3)^2 - 2(-iz + 3i + 3) + 2 = 0$.

D'après le a), les solutions de cette équation sont les solutions des deux équations suivantes:

$-iz + 3i + 3 = 1 - i$ et $-iz + 3i + 3 = 1 + i$

$-iz + 3i + 3 = 1 - i \Leftrightarrow -iz = -2 - 4i \Leftrightarrow z = -2i + 4$ (remarquer: $-iz \times i = z$)

$-iz + 3i + 3 = 1 + i \Leftrightarrow -iz = -2 - 2i \Leftrightarrow z = -2i + 2$

Les solutions de $(-iz + 3i + 3)^2 - 2(-iz + 3i + 3) + 2 = 0$ sont $\{4 - 2i;\ 2 - 2i\}$

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\ \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1 + i$, $z_B = \overline{z_A}$, $z_C = 2z_B$.

a. Déterminer les formes algébriques de z_B et z_C.

$z_A = 1 + i$, $z_B = \overline{z_A} = 1 - i$, $z_C = 2z_B = 2 - 2i$.

b. Placer les points A, B et C

c. Montrer que les points A, B et C appartiennent au cercle ($\mathscr{C}$)de centre I d'affixe 3 et de rayon $\sqrt{5}$.

$IA = |z_A - z_I| = |1+i-3| = |-2+i| = \sqrt{(-2)^2+1^2} = \sqrt{5}$

$IB = \ldots. = |-2-i| = \sqrt{5}$

$IC = \ldots = |-1-2i| = \sqrt{5}$

d. Calculer $\dfrac{z_C - 3}{z_A - 3}$.

$$\frac{z_C-3}{z_A-3} = \frac{-1-2i}{-2+i} = \frac{i(i-2)}{-2+i} = i$$

en déduire la nature du triangle IAC.

Le résultat précédent montre que: $z_C - z_I = i(z_A - z_I)$, d'où,

C est l'image de A dans la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ (quart de tour de centre I direct)

IAC est un triangle rectangle isocèle direct en I .

e. Le point E est l'image du point O par la translation de vecteur $2\ \overrightarrow{IC}$. Déterminer l'affixe du point E.

L'affixe de $2\ \overrightarrow{IC}$ est $2(-1-2\mathrm{i}) = -2-4\mathrm{i}$

On a donc $z_{\mathrm{E}} = 0 + (-2-4\mathrm{i}) = -2-4\mathrm{i}$

f. Le point D est l'image du point E par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Déterminer l'affixe du point D.

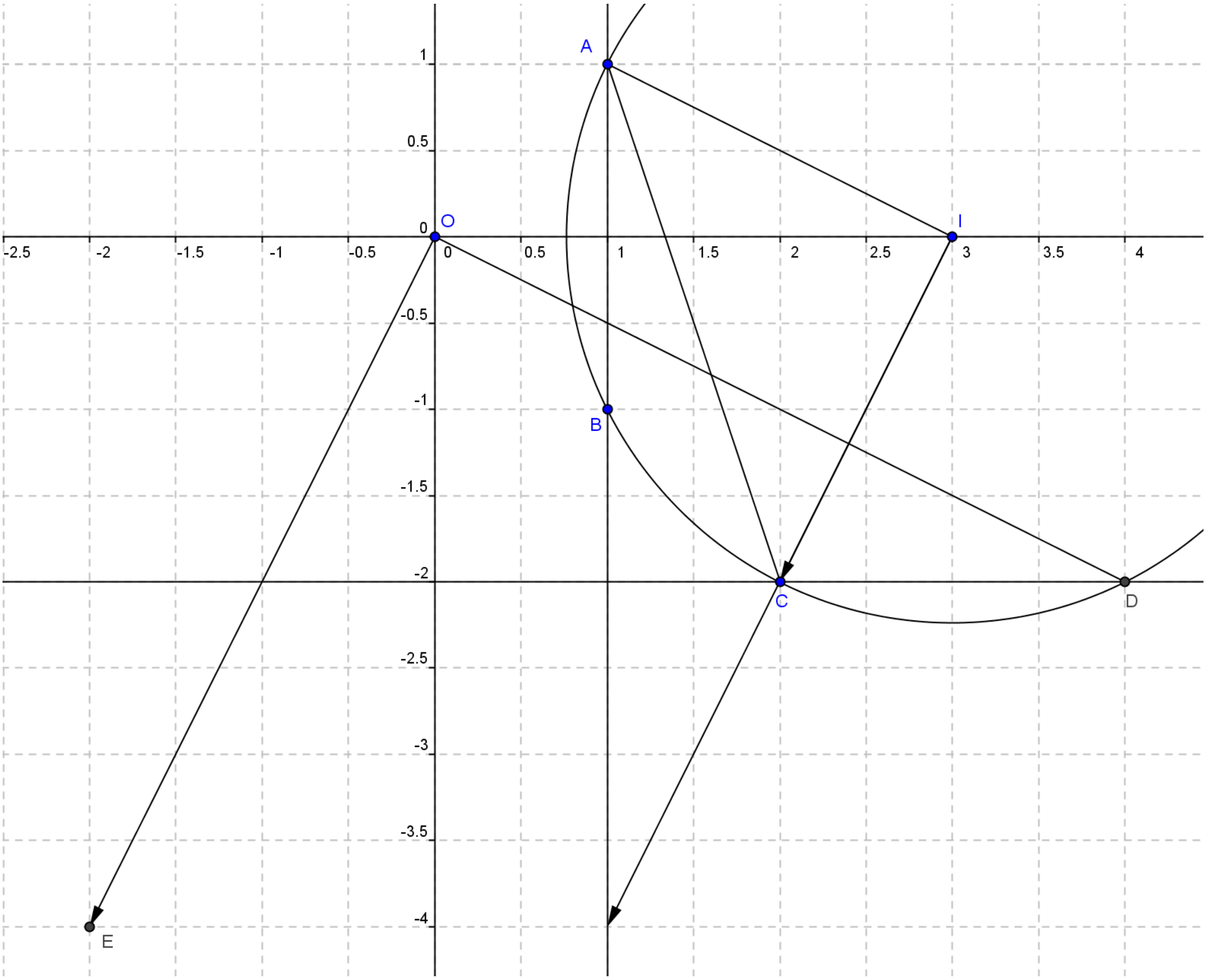
D'après l'écriture complexe d'une rotation, on a: $z_{\mathrm{D}} - z_{\mathrm{O}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}\,(z_{\mathrm{E}} - z_{\mathrm{O}})$

$z_D = \mathrm{i}z_{\mathrm{E}} = 4-2\mathrm{i}$

g. Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

La droite (AB) est parallèle à l'axe des ordonnées puisque les points A et B ont la même abscisse (leurs affixes sont des complexes conjugués)

La droite (CD) est parallèle à l'axe des abscisses puisque les points C et D ont la même ordonnée -2.

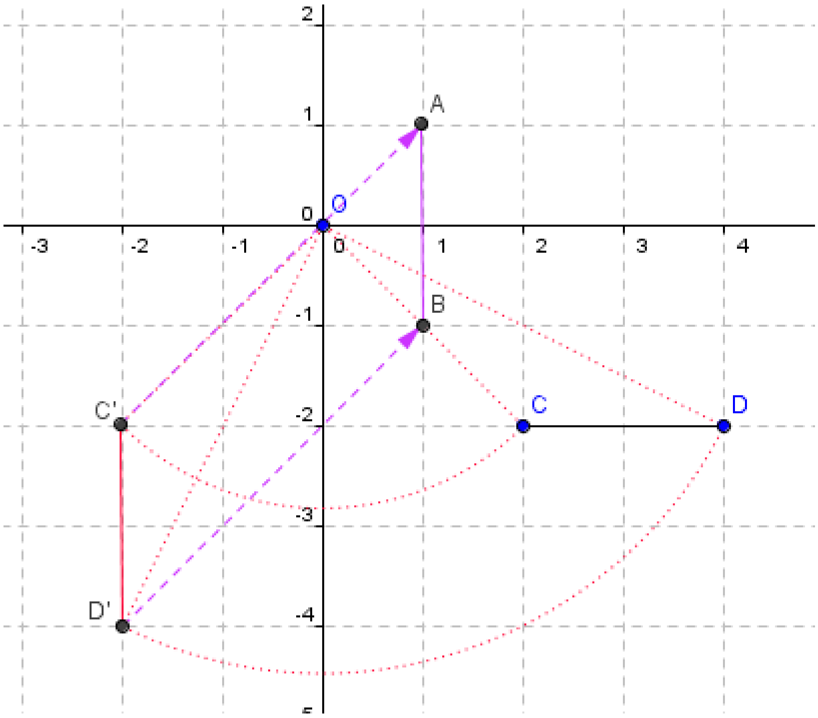


Quelques remarques à propos des 1a) et 1b)

On considère la transformation $T : z \mapsto -iz + 3i + 3$ qui peut se décomposer en une rotation r de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ suivie d'une translation t de vecteur $\vec{w}$ d'affixe 3 + 3i.

En effet : $z \xrightarrow{r} -iz \xrightarrow{t} -iz + 3 + 3i$

D'après les calculs du 1b), le point C d'affixe 2 – 2i a pour image par T le point A d'affixe 1 + i .
et le point D d'affixe 4 – 2i a pour image par T le point B d'affixe 1 – i.



Le segment [CD] a pour image un segment [$C'D'$] par r tel que $CD = C'D'$ et $(CD) \perp (C'D')$
et le segment [$C'D'$] a pour image le segment [AB] tel que $AB = C'D'$ et $(AB) \parallel (C'D')$

Autre remarque:

En montrant au 2d) que $\dfrac{z_C - 3}{z_A - 3} = i$, on montre que C est l'image de A par la rotation de centre I d'affixe 3 et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

On montre de même façon que $\dfrac{z_D - 3}{z_B - 3} = i$ ($z_D - 3 = 4 - 2i - 3 = 1 - 2i$ et $z_B - 3 = 1 - i - 3 = -2 - i$
et $i(-2 - i) = 1 - 2i$)

Le segment [CD] est donc l'image du segment [AB] par la rotation de centre I d'affixe 3 et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$., d'où, $AB = CD$ et $(AB) \perp (CD)$