Exercice 1

Une urne contient 15 boules identiques indiscernables au toucher de couleur noire, blanche, ou rouge.

On suppose que l'urne contient 3 boules noires et 6 boules banches.

On tire au hasard successivement et sans remise entre les deux tirages 2 boules dans l'urne et on note leur couleur.

Soit l'évènement N : « obtenir deux boules de couleur noire», et l'évènement G : « obtenir deux boules de même couleur ».

1) a) L'univers Ω est l'ensemble des couples de deux boules: il y a 15 éléments possibles au premier tirage et 14 au second tirage. card(Ω) = 15×14

Un élément favorable à N est constitué de deux boules noires: il y a 3 éléments possibles au premier tirage et 2 au second tirage. card(N) = 3×2.

Les conditions de l'expérience aléatoire mènent à l'hypothèse d'équiprobabilité: $P(N) = \dfrac{3\times 2}{15\times 14} = \dfrac{1}{35}$

b) $G = N \cup B \cup R$ où B est l'évènement « obtenir deux boules de couleur blanche» et R l'évènement: « obtenir deux boules de couleur rouge».

Les événements N, B, R sont disjoints deux-à-deux.

L'urne contient: 15 – 3 – 6 = 6 boules rouges

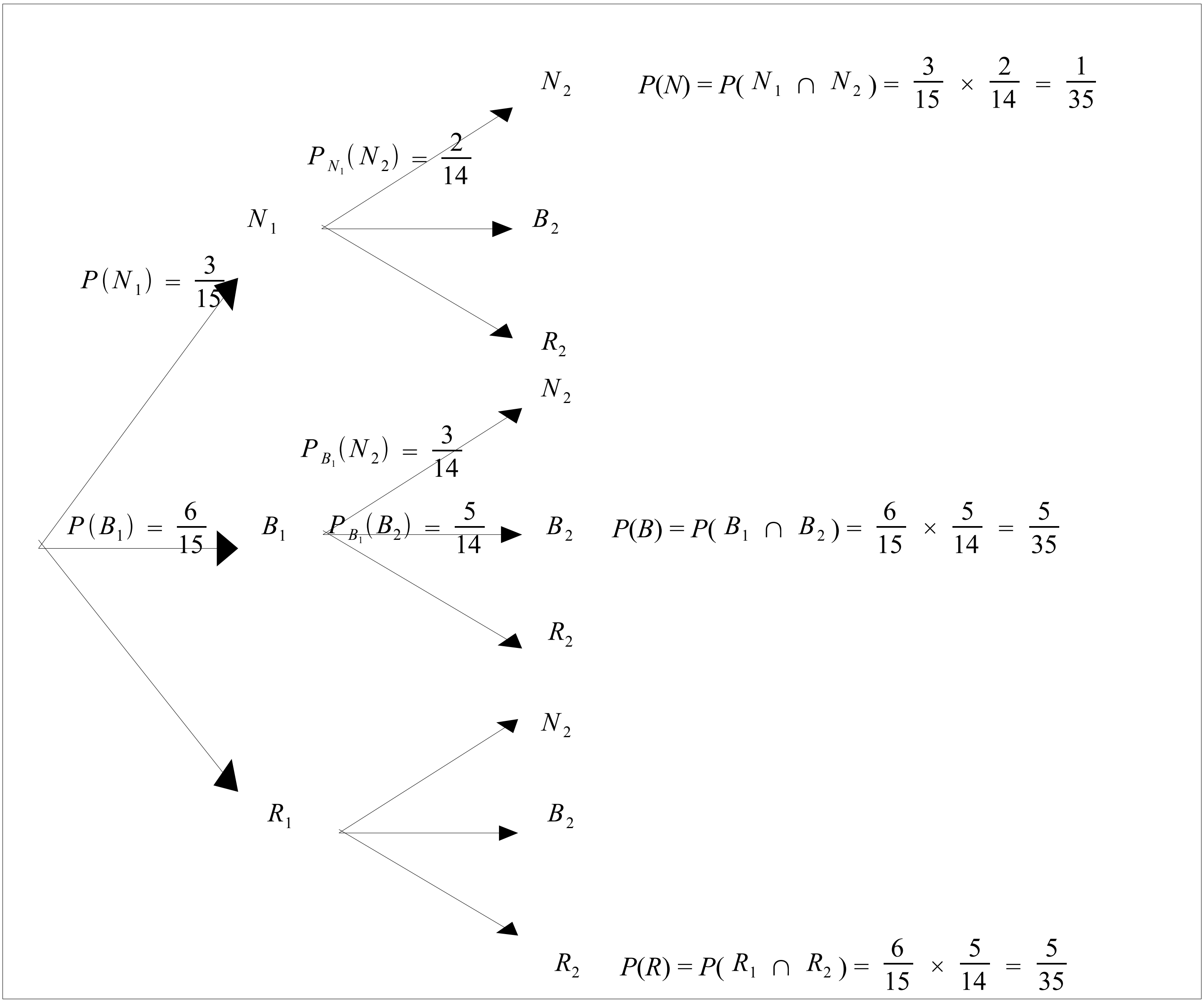
La même démarche pour G mène à: $P(G) = \dfrac{3\times 2+6\times 5+6\times 5}{15\times 14} = \dfrac{66}{210} = \dfrac{11}{35}$

Autre méthode

On peut aussi construire un arbre de probabilités:

On numérote alors les tirages: N_i avec $i = 1$ ou $i = 2$ étant la boule tirée au $i^{\text{ème}}$ tirage est noire.

De même avec les boules blanches et rouges.



2) Un joueur mise x euros, avec x entier naturel non nul, puis tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne. Dans tous les cas, il perd sa mise de départ.

S'il obtient deux boules noires, il reçoit $2k$ fois le montant de sa mise, avec k nombre décimal strictement supérieur à 1.

S'il obtient deux boules de la même couleur autre que noire, il reçoit k fois le montant de sa mise

Sinon, il ne reçoit rien.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

a) X peut prendre trois valeurs:

$2kx$ lorsque le joueur a tiré deux boules noires, $P(X = 2kx) = P(N)$

kx lorsque le joueur a tiré deux boules blanches ou deux boules rouges, $P(X = kx) = P(B) + P(R) = P(G) - P(N)$

$-x$ dans les autre cas, puisque le joueur a perdu sa mise. $P(X = -x) = 1 - P(G) = \frac{24}{35}$

X	$2kx$	kx	$-x$	Total
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{10}{35}$	$\frac{24}{35}$	1
$p_i x_i$	$\frac{2kx}{35}$	$\frac{10kx}{35}$	$\frac{-24x}{35}$	E(X) = $\frac{(12k-24)x}{35}$
$p_i x_i^2$ avec $k=2$	$\frac{16x^2}{35}$	$\frac{40x^2}{35}$	$\frac{24x^2}{35}$	$E(X^2) = \frac{80x^2}{35}$

b) Calculer l'espérance E(X) de la variable X en fonction de x et de k. E(X) = $\frac{(12k-24)x}{35}$

Le jeu est équitable lorsque $12k - 24 = 0$, soit $k = 2$

c) $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{80x^2}{35} = \frac{16x^2}{7}$ et $\sigma(X) = \frac{4x}{\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}x}{7}$

Exercice 2 (Baccalauréat S Antilles-Guyane septembre 2007)

Partie A

1. Déterminer le nombre complexe a tel que $\begin{cases} a(1+\mathrm{i}) = 1+3\mathrm{i} \\ \mathrm{i}a^2 = -4+3\mathrm{i} \end{cases}$

D'après l'équation 1): $a = \frac{1+3\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{(1+3\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2} = 2 + \mathrm{i}$

D'où, $a^2 = (2+\mathrm{i})^2 = 3 - 4\mathrm{i}$ et $\mathrm{i}a^2 = -4 + 3\mathrm{i}$. La deuxième équation est vérifiée.

2. Pour tout nombre complexe z, on pose $f(z) = z^2-(1+3\mathrm{i})z+(-4+3\mathrm{i})$

En développant $(z - a)(z - \mathrm{i}a) = z^2 - a(1+\mathrm{i})z + \mathrm{i}a^2 = z^2-(1+3\mathrm{i})z-4+3\mathrm{i}$

$f(z) = 0 \Leftrightarrow (z - a)(z - \mathrm{i}a) = 0 \Leftrightarrow z = a$ ou $z = \mathrm{i}a$.

Les solutions sont donc $2 + \mathrm{i}$ et $-1 + 2\mathrm{i}$

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, unité graphique : 5 cm.

1. On considère les points A et B d'affixes respectives $a = 2 + \mathrm{i}$ et $b = -1 + 2\mathrm{i}$.

Placer A et B dans le repère et compléter la figure au fur et à mesure.

$b = \mathrm{i}a$ (voir Partie A-2)

On a donc: $|b| = |\mathrm{i}a| = |\mathrm{i}|\times|a| = |a|$ On en déduit: $OB = OA$

et $\arg(b) = \arg(\mathrm{i}a) = \arg(\mathrm{i}) + \arg(a) = \frac{\pi}{2} + \arg(a)$ $[2\pi]$. On en déduit: $(\vec{u},\overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2} + (\vec{u},\overrightarrow{OA})$,

soit, $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}$

Ou encore: le triangle OAB est un triangle isocèle rectangle tel que $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}$.

Comme $b = \mathrm{i}a$, le point B est l'image de A dans la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

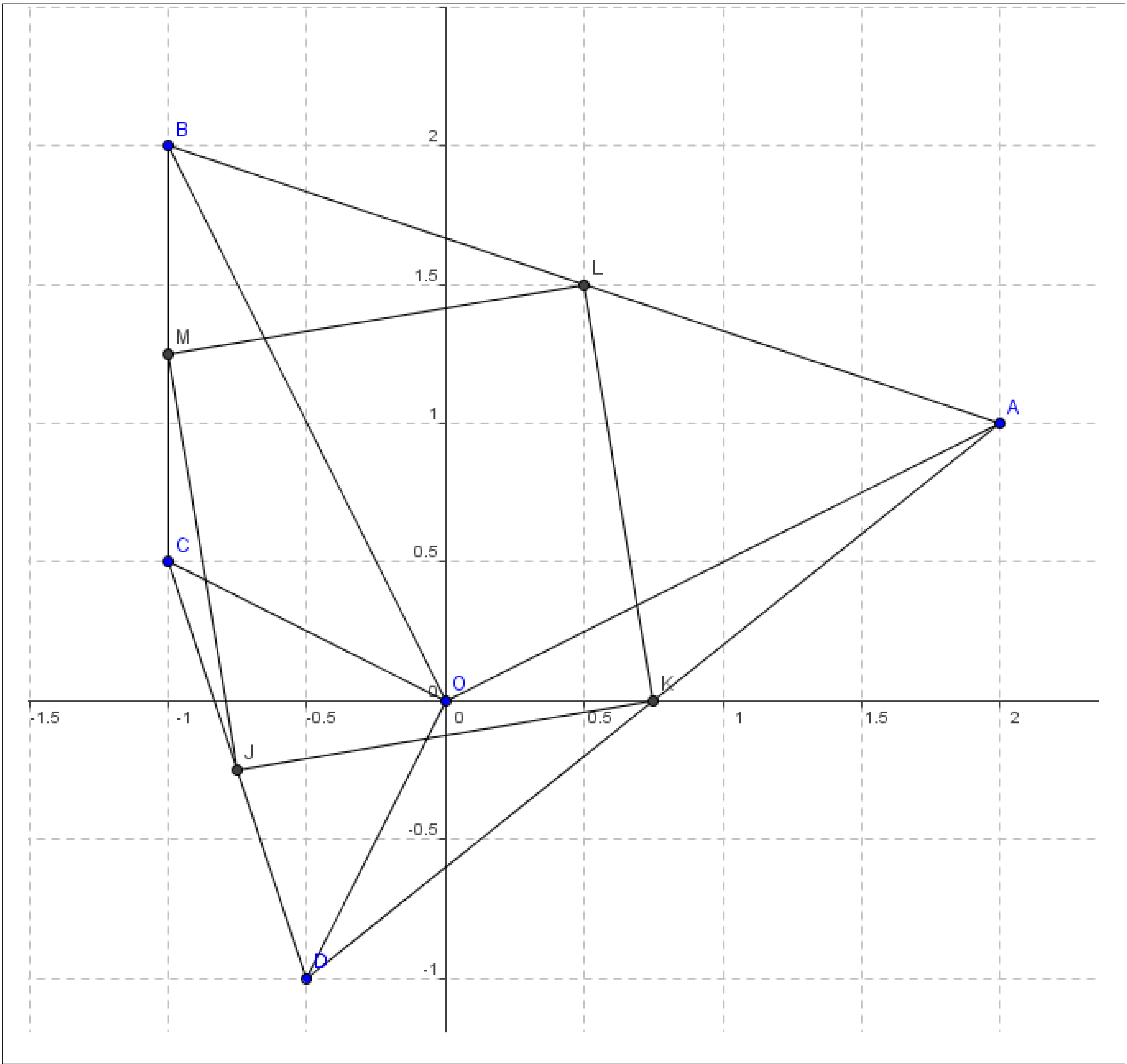
Conclusion: le triangle OAB est un triangle isocèle rectangle tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}$.

2. On considère le point C d'affixe $c = -1 + \frac{1}{2}\mathrm{i}$. Déterminer l'affixe du point D tel que le triangle OCD soit un triangle isocèle rectangle tel que $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = \frac{\pi}{2}$.

D est donc l'image de C dans la dans la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On en déduit: $d = \mathrm{i}\left(-1 + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}$

3. Soit M le milieu de $[CB]$. On appelle $z_{\overrightarrow{OM}}$ et $z_{\overrightarrow{DA}}$ les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{DA}$. Prouver que : $\frac{z_{\overrightarrow{OM}}}{z_{\overrightarrow{DA}}} = \frac{1}{2}\mathrm{i}$.



L'affixe de $\overrightarrow{OM}$ est celle de M: $m = \dfrac{c+b}{2} = -1 + \dfrac{5}{4}\mathrm{i}$

L'affixe de $\overrightarrow{DA}$ est $a - d = \dfrac{5}{2} + 2\mathrm{i}$

$$\frac{z_{\overrightarrow{OM}}}{z_{\overrightarrow{DA}}} = \frac{-1+\dfrac{5}{4}\mathrm{i}}{\dfrac{5}{2}+2\mathrm{i}} = \frac{-4+5\mathrm{i}}{2(5+4\mathrm{i})} = \frac{\mathrm{i}(5+4\mathrm{i})}{2(5+4\mathrm{i})} = \frac{1}{2}\mathrm{i}$$

4. Une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{OM})$ est un argument de $\dfrac{z_{\overrightarrow{OM}}}{z_{\overrightarrow{DA}}}$.

Or, $\arg(\dfrac{1}{2}\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

5. Comme $|z_{\overrightarrow{OM}}| = \left|\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right| \times |z_{\overrightarrow{DA}}|$ on a: $OM = \dfrac{1}{2} DA$

6. On appelle J, K et L les milieux respectifs des segments $[CD]$, $[DA]$ et $[AB]$.

On admet que le quadrilatère $JKLM$ est un parallélogramme. Démontrer que c'est un carré.

Une méthode: on peut montrer deux côtés consécutifs égaux et perpendiculaires.

En appliquant le théorème de Thalès (dans le cas particulier des milieux) dans les triangles ACD et ABC, on a:

$$\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{ML} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$$

et, dans les triangles BCD et ABD, on a: $\overrightarrow{JM} = \overrightarrow{KL} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DB}$.

Or, par la rotation r de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, on a: $r(A) = B$ et $r(C) = D$, ce qui prouve:

$CA = DB$ et $(CA) \perp (DB)$.

Conclusion: $JK = JM$ et $(JK) \perp (JM)$

Une autre méthode, on peut montrer que $JL = KM$ et $(JL) \perp (KM)$ (diagonales de m^me longueur et perpendiculaires)

L'affixe de $\overrightarrow{JL}$ est: $z_{\overrightarrow{JL}} = \dfrac{a+b}{2} - \dfrac{c+d}{2} = \dfrac{a+b-c-d}{2}$

et celle de $\overrightarrow{KM}$ est: $z_{\overrightarrow{KM}} = \dfrac{c+b}{2} - \dfrac{a+d}{2} = \dfrac{b+c-a-d}{2}$

Comme $b = \mathrm{i}a$ et $d = \mathrm{i}c$, il vient: $z_{\overrightarrow{JL}} = \dfrac{(a-c)(1+\mathrm{i})}{2}$ et $z_{\overrightarrow{KM}} = \dfrac{(a-c)(-1+\mathrm{i})}{2}$

Par conséquent: $z_{\overrightarrow{KM}} = \mathrm{i}\, z_{\overrightarrow{JL}}$. Ce qui prouve $JL = KM$ et $(JL) \perp (KM)$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.

On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal (unité graphique: 4 cm)

Partie A/ (algèbre)

1) Montrer que pour tout x réel, $-1 < f(x) < 1$

Une méthode:

Comme pour tout X réel, $e^X > 0$, on a: $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$,

d'où, $e^x - e^{-x} < e^x + e^{-x}$, soit, $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < 1$

d'autre part: $-(e^x + e^{-x}) < e^x - e^{-x}$, soit $-1 < \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Une autre méthode:

Pour comparer deux nombres, on cherche le signe de leur différence:

$f(x) - 1 = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - 1 = \dfrac{-2e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, comme pour tout X réel, $e^X > 0$, on a: $f(x) - 1 < 0$, d'où, ...

$f(x) - (-1) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} + 1 = \dfrac{2e^x}{e^x + e^{-x}}$, comme pour tout X réel, $e^X > 0$, on a: $f(x) + 1 > 0$, d'où, ...

2) Montrer que pour tout x réel, $f(x) = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par e^x, on a: $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par e^{-x}, on a: $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$

Partie B/ (analyse)

1) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, d'où, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} - 1 = -1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} + 1 = 1$. Conclusion: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$, d'où, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

Remarquer: Les droites d'équations $y = -1$ et $y = 1$ seront asymptotes à $\mathscr{C}$ en $-\infty$ et $+\infty$.

2) a) Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' + y^2 = 1$

$$f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = 1 - [f(x)]^2$$

$$= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$$

b) Dresser le tableau de variation de f.

Comme $-1 < f(x) < 1$, on a: $0 \leqslant [f(x)]^2 < 1$, d'où, $f'(x) > 0$

x	$-\infty$		∞
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1

c) Donner le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

Comme $f(0) = 0$ et que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a: $f(x) < 0$ sur $]-\infty; 0[$ et $f(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$

3) a) Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

Une équation de T est: $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 1.x + 0 = x$

b) On pose $d(x) = f(x) - x$.

Étudier la variation de d et le signe de $d(x)$.
$d'(x) = f'(x) - 1 = -[f(x)]^2$
d est donc une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, et, comme $d(0) = 0$, il vient:
$d(x) > 0$ sur $]-\infty; 0[$ et $d(x) < 0$ sur $]0; +\infty[$

En déduire la position relative de $\mathscr{C}$ et T.
$\mathscr{C}$ est au-dessus de T sur $]-\infty; 0[$ et au-dessous de T sur $]0; +\infty[$
4) Construire T, $\mathscr{C}$ et les asymptotes éventuelles.