Exercice 1 (D'après Bac S France septembre 2008)

Dans une kermesse un organisateur de jeux dispose de 2 roues de 20 cases chacune.

La roue A comporte 18 cases noires et 2 cases rouges.

La roue B comporte 16 cases noires et 4 cases rouges.

Lors du lancer d'une roue toutes les cases ont la même probabilité d'être obtenues.

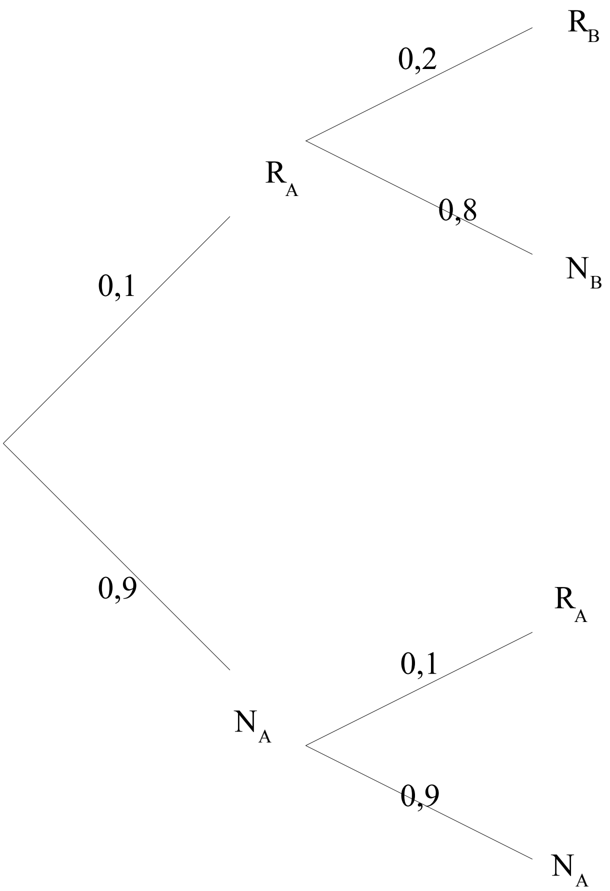
La règle du jeu est la suivante :

• Le joueur mise 1 € et lance la roue A.

• S'il obtient une case rouge, alors il lance la roue B, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.

• S'il obtient une case noire, alors il relance la roue A, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.



Nous sommes dans l'hypothèse d'équiprobabilité.

La probabilité d'avoir la couleur rouge de la roue A (R_A) est $\frac{2}{20}$ = 0,1, la couleur noire de la roue A (N_A) est: $\frac{18}{20}$ = 0,9

La probabilité d'avoir la couleur rouge de la roue B (R_B) est $\frac{4}{20}$ = 0,2 et la couleur noire de la roue B (N_B) est: $\frac{16}{20}$ = 0,8

2. Soient E et F les évènements :

E : « à l'issue de la partie, les 2 cases obtenues sont rouges »

Les deux cases sont rouges dans le seul cas où on Rouge de la roue A et Rouge de la roue B.

P(*E*) = P($R_A \cap R_A$) = P(R_A) $\times$ P_{R_A}(R_B) = 0,1$\times$0,2 = 0,02

F : « à l'issue de la partie, une seule des deux cases est rouge ».

F est la réunion disjointe de ($R_A \cap N_B$) $\cup$ ($N_A \cap R_A$)

p(F) = 0,1×0,8 + 0,9×0,1 = 0,17.

3. *Si les 2 cases obtenues sont rouges le joueur reçoit 10 € ; si une seule des cases est rouge le joueur reçoit 2 € ; sinon il ne reçoit rien.*

X désigne la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros du joueur (rappel le joueur mise 1 €).

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

Les valeurs prises par X sont: –1; 1 et 9.

P(X = 9) = P(E) = 0,02, P(X = 1) = P(F) = 0,17 et P(X = –1) = 1 – 0,02 – 0,17 = 0,81

b. Calculer l'espérance mathématique de X et en donner une interprétation.

X	–1	1	9	Total
$P_i = \mathrm{P}(X = x_i)$	0,81	0,17	0,02	1
$P_i\ x_i$	–0,81	0,17	0,18	**$E(X)$ = –0,46**

L'organisateur gagne en moyenne 0,46 € par partie.

Le joueur perd en moyenne 0,46 € par partie.

Si le nombre de parties est grand (supposons 1 000 parties), l'organisateur peut espérer gagner (0,46×1000 = 460 €)

4. Le joueur décide de jouer 3 parties consécutives et ***indépendantes***

Démontrer que la probabilité de ne jamais lancer la roue B est $0{,}9^3$ *et en déduire que la probabilité p qu'il lance au moins une fois la roue B est telle que p = 1−* $0{,}9^3$

Le joueur ne lance jamais la roue B (notons $\overline{B_i}$ ne pas lancer la roue B à la partie n° i) lorsqu'il sort le noir de la roue A.

Puisque les parties sont **indépendantes**, on a: P($\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3}$) = 0,9×0,9×0,9 = $0{,}9^3$

Comme « lancer au moins une fois la roue B » est **l'événement contraire** de l'événement « ne jamais lancer la roue B », on a: $p = 1 - 0{,}9^3$

5. Le joueur décide de jouer n parties consécutives et indépendantes (n est un entier naturel supérieur ou égal à 2)

a) Démontrer que la probabilité p_n *qu'il lance au moins une fois la roue B est telle que* $p_n = 1 - 0{,}9^n$

La même démarche qu'au 4) appliquée à n parties montre que:

Les événements: « Le joueur ne lance jamais la roue B en n parties » et « lancer au moins une fois la roue B en n parties » sont des événements **contraires.**

P(« Le joueur ne lance jamais la roue B ») = $0{,}9^n$ et la probabilité p_n qu'il lance au moins une fois la roue B est telle que $p_n = 1 - 0{,}9^n$

b) On considère la suite (u_n) définie par $0{,}9^n$.

Caractériser la suite (u_n)

(u_n) est une suite **géométrique** de premier terme u_2 = 0,81 et **de raison 0,9**.

En effet, $u_{n+1} = 0{,}9^{n+1} = 0{,}9 \times 0{,}9^n = 0{,}9 \times u_n$

Comme –1 < 0,9 < 1, la suite géométrique (u_n) converge vers 0.

c) Justifier que la suite (p_n) *est croissante.*

Comme 0 < 0,9 < 1, la suite géométrique (u_n) est **décroissante**, d'où, $-(u_n)$ est une suite croissante et par conséquent la suite (p_n) est croissante.

À l'aide de la calculatrice déterminer la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $p_n > 0{,}9$.

Sur la calculatrice, on lit $p_{21} \approx 0{,}89058$ ... et $p_{22} \approx 0{,}90152$ ...

La valeur minimale est $n_0 = 22$

Comme la suite (p_n) est croissante: si $n \geqslant n_0$ alors $p_n \geqslant p_{n_0}$

Remarque sur le sujet:

Le sujet initial est:

4. Le joueur décide de jouer n parties consécutives et indépendantes (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2)

a. Démontrer que la probabilité p_n qu'il lance au moins une fois la roue B est telle que $p_n = 1-(0{,}9)^n$.

b. Justifier que la suite de terme général p_n est convergente et préciser sa limite.

c. Quelle est la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $p_n > 0{,}9$?

Exercice 2 (baccalauréat S Nouvelle-Calédonie novembre2009) 10 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1 + i\sqrt{3}$, $z_B = 2i$.

1.a. Écrire z_A et z_B sous forme exponentielle.

$|z_A| = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = 2$, d'où, $z_A = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2\ e^{i\pi/3}$

et $z_B = 2\ e^{i\pi/2}$

b. Placer les points A et B sur une figure que l'on complètera au cours de l'exercice.

Voir figure.

Pour placer A, il suffit de construire le cercle de centre O et de rayon 2 et de placer sur ce cercle le point d'abscisse 1 et d'ordonnée positive. Ce cercle coupe l'axe des imaginaires purs en B (ordonnée positive)

c. Déterminer la nature du triangle OAB.

d'après le 1a), on a: $OA = OB = 2$ et $(\vec{u},\overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{3}$ et $(\vec{u},\overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}$

d'où, (relation de Chasles), $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.

Le triangle OAB est un triangle isocèle non équilatéral et non rectangle.

2. On note r la rotation de centre O qui transforme A en B. Pour tout point M d'affixe z, on note M' l'image de

M par r et z' l'affixe du point M'.

a. Calculer un argument du quotient $\frac{z_B}{z_A}$. Interpréter géométriquement ce résultat.

$$\frac{z_B}{z_A} = \frac{2e^{i\pi/2}}{2e^{i\,pi/3}} = \mathrm{e}^{i(\pi/2-\pi/3)} = \mathrm{e}^{i\pi/6}$$

ou encore

$\arg(\frac{z_B}{z_A}) = \arg(z_B) - \arg(z_A) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

Une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.

b. En déduire l'écriture complexe de la rotation r .

r est par conséquent la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$, d'où, l'écriture complexe de r est $z \mapsto \mathrm{e}^{i\pi/6} z$.

3. Soient Γ le cercle de centre A passant par O et Γ' le cercle de centre B passant par O.
Soit C le deuxième point d'intersection de Γ et Γ' (autre que O). On note z_C son affixe.
a. Justifier que le cercle Γ' est l'image du cercle Γ par la rotation r .

L'image par la rotation r du cercle Γ de centre A passant par O est
le cercle de centre $r(A) = B$ passant par $r(O)= O$.
$r(\Gamma)$ est donc Γ'.

b. Calculer l'affixe z_I du milieu I de $[AB]$.

$$z_I = \frac{z_A+z_B}{2} = \frac{1+i\sqrt{3}+2\mathrm{i}}{2} = \frac{1+\mathrm{i}(\sqrt{3}+2)}{2}$$

c. Déterminer la nature du quadrilatère $OACB$.

On a : $OA = OB = 2$

On a: $AC = OA$ (car, C est un point de Γ de rayon $[AO]$)

On a: $BC = OB$ (car, C est un point de Γ' de rayon $[BO]$)

Finalement: $OA = AC = CB = OB$.

Le quadrilatère $OACB$ est par conséquent un losange.

d. En déduire que I est le milieu de $[OC]$ puis montrer que l'affixe de C est: $z_C = 1 + (2 + \sqrt{3})\mathrm{i}$.

Les diagonales du losange se coupent perpendiculairement en leur milieu.

Or, I , étant le milieu de la diagonale $[AB]$, est le milieu de la diagonale $[OC]$.

On en déduit: $z_C = 2\times z_I = 1 + (2 + \sqrt{3})i$.

Remarque:

L'énoncé propose de chercher d'abord l'affixe du milieu de $[OC]$ puis d'en déduire l'affixe du point C.

Mais, sachant que $OACB$ est un parallélogramme, on sait que $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

qui équivaut à: $z_C = z_A + z_B = 1 + (2 + \sqrt{3})i$.

4. Soit D le point d'affixe $z_D = 2i\sqrt{3}$.

a. Justifier que le point D appartient au cercle Γ. Placer D sur la figure.

$AD = |z_D - z_A| = |2i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}| = |-1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = 2 = AO$

ce qui prouve que D appartient au cercle Γ de centre A passant par O .

D est donc à l'intersection de Γ et de l'axe des imaginaires purs.

b. Placer D' image de D par la rotation r définie à la question 2.

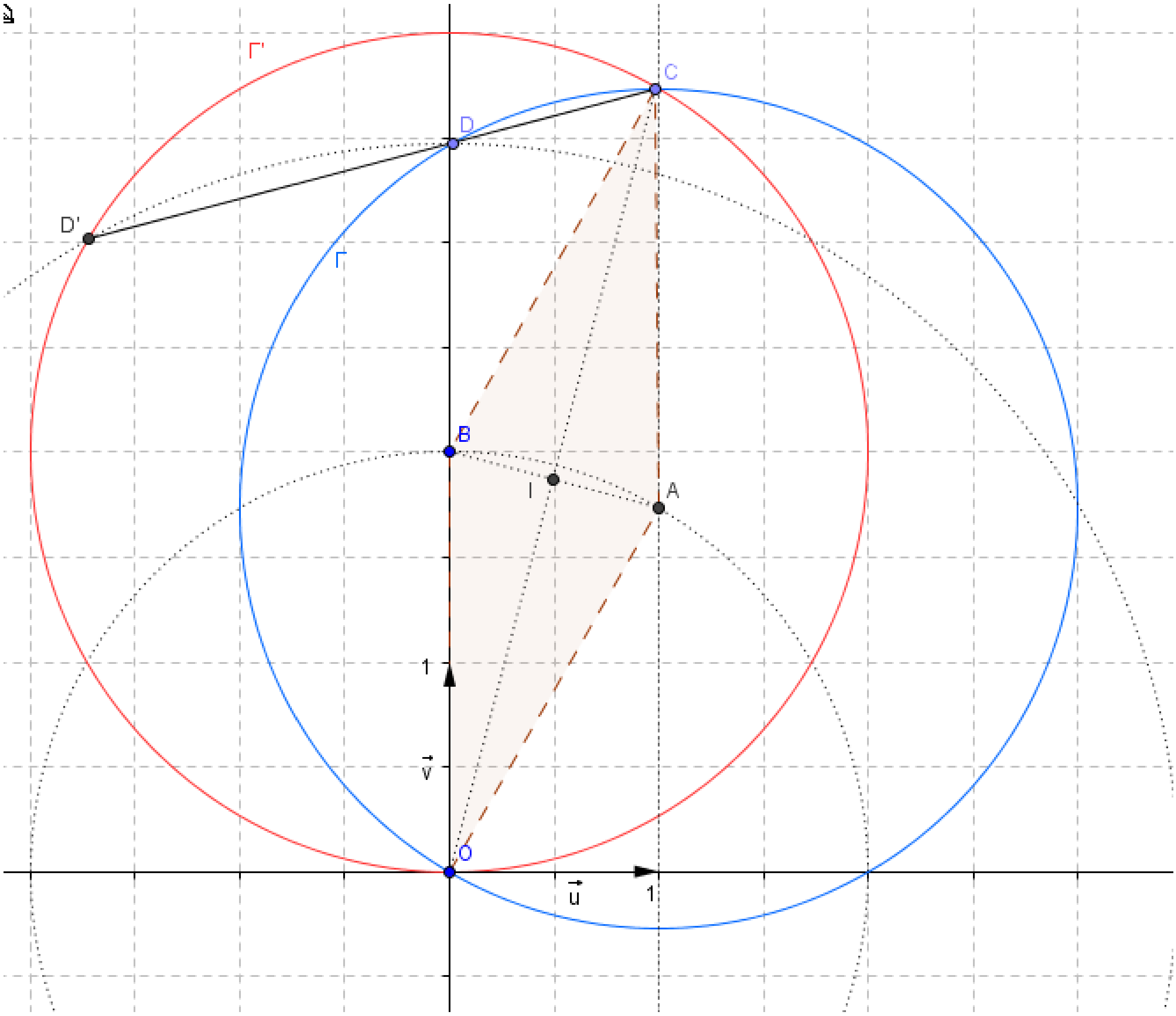
D étant sur Γ , son image par r est sur $r(\Gamma) = \Gamma'$.

On a aussi $OD = OD'$ ce qui permet de construire le point D' en construisant le cercle de centre O passant par D et le point D' est celui tel que $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OD'})$ est un angle direct.

On note $z_{D'}$ l'affixe de D'.

Montrer que $z_{D'} = -\sqrt{3} + 3i$.

$z_{D'} = e^{i\pi/6}\, z_D = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)2i\sqrt{3} = -\sqrt{3} + 3i.$



5. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DD'}$ sont colinéaires. Que peut-on en déduire?

L'affixe de $\overrightarrow{DC}$ est: $z_C - z_D = 1 + (2 + \sqrt{3})i - 2i\sqrt{3} = 1 + (2 - \sqrt{3})i$

L'affixe de $\overrightarrow{DD'}$ est: $z_{D'} - z_D = -\sqrt{3} + 3i - 2i\sqrt{3} = -\sqrt{3}\,(1 + (2 - \sqrt{3}\,i)$.

On en déduit que $\overrightarrow{DD'} = -\sqrt{3}\ \overrightarrow{DC}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DD'}$ sont colinéaires.

On en déduit que les points D, C et D' sont alignés.