**Exercice 1**

I) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $3\ln(2-x) + \dfrac{13}{4} < 0$

On obtient le système: $\begin{cases} 2-x>0 \\ \ln(2-x)<-\dfrac{13}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ 2-x<\exp\left(-\dfrac{13}{12}\right) \end{cases} \Leftrightarrow 2-\exp\left(-\dfrac{13}{12}\right)<x<2$

$S = ]2 - e^{-13/12} ; 2[$

II) Soit $f$ la fonction définie sur $]-\infty; 2[$ par $f(x) = 3(x-2).\ln(2-x) + \dfrac{1}{4}x$.

On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère. (Le tracé de la courbe n'est pas demandé)

1) a) Déterminer la limite de $f$ en $-\infty$.

On a: $\lim\limits_{x\to-\infty} 2-x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, d'où, $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(2-x) = +\infty$.

et, $\lim\limits_{x\to-\infty} x-2 = -\infty$, par conséquent, la limite du produit donne: $\lim\limits_{x\to-\infty} 3(x-2)\ln(2-x) = -\infty$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{4}x = -\infty$, la limite de la somme donne: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

b) Déterminer la limite de $f$ en 2.

On pose $X = 2-x$. On a alors: $(x-2)\ln(2-x) = -X\ln(X)$.

$\lim\limits_{x\to2} 2-x = 0$ et $\lim\limits_{X\to0} X\ln(X) = 0$, d'où, $\lim\limits_{x\to2} 3(x-2)\ln(2-x) = 0$.

Comme $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{1}{4}x = \dfrac{1}{2}$, il vient: $\lim\limits_{x\to2} f(x) = \dfrac{1}{2}$

2) a) Montrer que la dérivée $f'$ est définie sur $]-\infty; 2[$ par $f'(x) = 3\ln(2-x) + \dfrac{13}{4}$

Étude du produit: $p: x \mapsto (x-2)\ln(2-x)$

$p'(x) = 1.\ln(2-x)+\dfrac{-1}{2-x}\times(x-2) = \ln(2-x) + 1$ en remarquant que $x-2 = -(2-x)$

On a alors: $f'(x) = 3(\ln(2-x) + 1) + \dfrac{1}{4} = 3\ln(2-x) + \dfrac{13}{4}$

b) Déterminer les variations de $f$ et dresser le tableau de variations. (Ne pas calculer la valeur de l'extrémum à cette question).

D'après I- la dérivée s'annule en $\alpha = 2 - e^{-13/12}$, est strictement positive sur $]-\infty; \alpha[$ et strictement négative sur $]\alpha; 2[$.

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | $1/2$ ‖ |

3) Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1

Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est: $y = f'(1)(x-1) + f(1) = \dfrac{13}{4}(x-1) + \dfrac{1}{4} = \dfrac{13}{4}x - 3$.

---

**Exercice 2 (Bac Polynésie juin 2006)**

On a posé à 1 000 personnes la question suivante : « Combien de fois êtes-vous arrivé en retard au travail au cours des deux derniers mois ? ». Les réponses ont été regroupées dans le tableau suivant :

| Retards le 1er mois / Retards le 2ème mois | 0 | 1 | 2 ou plus | Total |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 262 | 212 | 73 | 547 |
| 1 | 250 | 73 | 23 | 346 |
| 2 ou plus | 60 | 33 | 14 | 107 |
| Total | 572 | 318 | 110 | 1 000 |

1. On choisit au hasard un individu de cette population.

a. Déterminer la probabilité que l'individu ait eu au moins un retard le premier mois.

Sur 1 000 individus, on dénombre 318 + 110 = 428 personnes ayant eu au moins un retard le premier mois.

$P(\text{au moins un retard le premier mois}) = 0{,}428$

b. Déterminer la probabilité que l'individu ait eu au moins un retard le deuxième mois sachant qu'il n'en a pas eu le premier mois.

Sur les 572 individus n'ayant pas eu de retard le premier mois, on dénombre: 250 + 60 = 310 individus ayant eu au moins un retard le deuxième mois

$P_{\text{aucun retard le \{1\}er mois}}(\text{au moins un retard le deuxième mois}) = 310/572 = \dfrac{155}{286}$

2. On souhaite faire une étude de l'évolution du nombre de retards sur un grand nombre $n$ de mois ($n$ entier naturel non nul).On fait les hypothèses suivantes :

– si l'individu n'a pas eu de retard le mois $n$, la probabilité de ne pas en avoir le mois $n+1$ est 0,46.

– si l'individu a eu exactement un retard le mois $n$, la probabilité de ne pas en avoir le mois $n+1$ est 0,66.

– si l'individu a eu deux retards ou plus le mois $n$, la probabilité de ne pas en avoir le mois $n+1$ est encore 0,66.

On note $A_n$ , l'évènement « l'individu n'a eu aucun retard le mois $n$,

$B_n$ , l'évènement « l'individu a eu exactement un retard le mois $n$ »,

$C_n$ , l'évènement « l'individu a eu deux retards ou plus le mois $n$ ».

Les probabilités des évènements $A_n$, $B_n$, $C_n$ sont notées respectivement $p_n$, $q_n$ et $r_n$.

a. Pour le premier mois ($n = 1$), les probabilités $p_1$, $q_1$ et $r_1$ sont obtenues à l'aide du tableau précédent. Déterminer les probabilités $p_1$, $q_1$ et $r_1$.

$p_1 = 0{,}572$, $q_1 = 0{,}318$ et $r_1 = 0{,}110$.

b. Exprimer $p_{n+1}$ en fonction de $p_n$, $q_n$, et $r_n$. On pourra s'aider d'un arbre.

Les événements $A_n$, $B_n$, $C_n$ forment une partition de l'univers.

D'après la formule des probabilités totales, on a:

$$p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1}) \times p_n + P_{B_n}(A_{n+1}) \times q_n + P_{C_n}(A_{n+1}) \times r_n$$

Or, d'après l'énoncé: $P_{A_n}(A_{n+1}) = 0{,}46$, $P_{B_n}(A_{n+1}) = 0{,}66$ et $P_{C_n}(A_{n+1}) = 0{,}66$

$p_{n+1} = 0{,}46\ p_n + 0{,}66\ q_n + 0{,}66\ r_n = 0{,}46\ p_n + 0{,}66(q_n + r_n)$

c. Montrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul, $p_{n+1} = -0{,}2\,p_n + 0{,}66$.

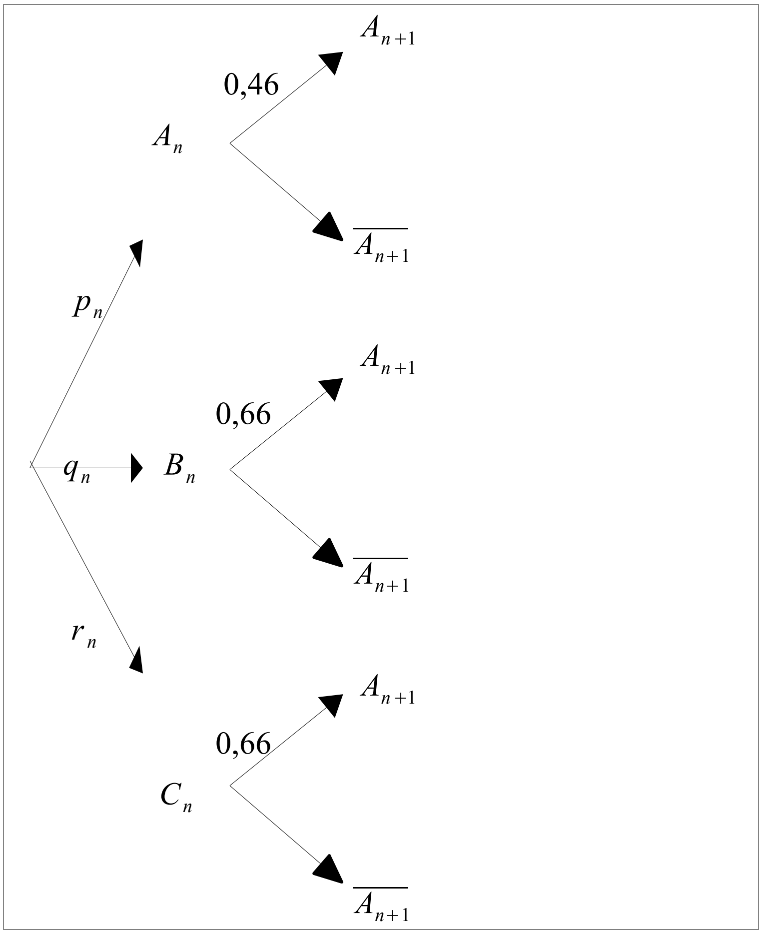
Or, $p_n + q_n + r_n = 1$, donc,

$p_{n+1} = 0{,}46\ p_n + 0{,}66(q_n + r_n) = 0{,}46\ p_n + 0{,}66(1 - p_n) = -0{,}2\,p_n + 0{,}66$.

d. Soit la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ non nul par $u_n = p_n - 0{,}55$. Démontrer que $(u_n)$ est une suite géométrique dont on donnera la raison.

$u_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}55 = -0{,}2\,p_n + 0{,}66 - 0{,}55 = -0{,}2\,p_n + 0{,}11 = -0{,}2(p_n - 0{,}55) = -0{,}2\ u_n$

$(u_n)$ est donc une suite géométrique de raison $-0{,}2$




e. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

Comme $-1 < -0{,}2 < 1$, la suite $(u_n)$ converge vers 0 et comme $p_n = u_n + 0{,}55$, la suite $(p_n)$ converge vers 0,55.

---

**Exercice 3 (Bac La Réunion juin 2007)**

Soient $a$ et $b$ deux nombres réels strictement positifs tels que $a < b$.

On désigne par $A$ et par $B$ les points d'abscisses respectives $a$ et $b$ de la courbe Γ représentative de la fonction logarithme népérien dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Les points $Q$ et $R$ sont les projetés orthogonaux respectifs des points $A$ et $B$ sur l'axe des ordonnées.

1. a. Donner l'équation réduite de la tangente ($T$) au point $A$ à la courbe Γ.

Une équation de ($T$) est: $y = \dfrac{1}{a}(x - a) + \ln(a) = \dfrac{1}{a}x - 1 + \ln(a)$

b. Déterminer l'ordonnée du point d'intersection $P$ de ($T$) avec l'axe des ordonnées.

Lorsque $x = 0$, on a: $y = \ln(a) - 1$ $\qquad$ $P(0; \ln(a) - 1)$

Calculer la longueur $PQ$. En déduire une construction simple de ($T$) ; la réaliser sur la figure en annexe.

On en déduit $PQ = 1$ puisque l'ordonnée de $Q$ est $\ln(a)$

2. ***Restitution organisée de connaissances***

On suppose connue la propriété :

« Pour tout couple ($x$ ; $y$) de nombres réels strictement positifs, on a $\ln(xy) = \ln(x)+\ln(y)$. »

En déduire que, pour tout nombre réel m strictement positif, on a $\ln(\sqrt{m}) = \dfrac{1}{2}\ln(m)$

On a: $\ln(m) = \ln(\sqrt{m}\times\sqrt{m}) = \ln(\sqrt{m}) + \ln(\sqrt{m}) = 2\ln(\sqrt{m})$, CQFD

3. Utiliser le résultat de la question 2 pour placer sur l'axe des abscisses le point $G$ d'abscisse $\sqrt{ab}$. Expliquer la construction et la réaliser sur la figure de l'annexe (on laissera les traits de construction apparents).

On a alors: $\ln(\sqrt{ab}) = \dfrac{1}{2}\ln(ab) = \dfrac{\ln(a)+\ln(b)}{2}$.

Soit $C$ le point d'abscisse $\sqrt{ab}$ sur $\Gamma$ et $S$ son projeté orthogonal sur l'axe des ordonnées.

$S$ est donc le milieu des points $Q$ et $R$.

On place $S$ milieu de [$QR$] et on obtient $C$ sur la courbe $\Gamma$ puis $G$ sur l'axe des abscisses