Énoncé: D'après France septembre 2010

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$.
Soit $\mathscr{P}$ *le plan d'équation* $3x + y - z - 1 = 0$

et $\mathscr{D}$ *la droite dont une représentation paramétrique est:* $\begin{cases} x=-t+1 \\ y=2t \\ z=-t+2 \end{cases}$ *où* $t \in \mathbb{R}$.

1) a) Donner un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathscr{D}$.

D'après la représentation paramétrique de $\mathscr{D}$, on a: $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

En effet, $M(x; y; z)$ et en désignant par A le point de coordonnées (1; 0; 2), $\begin{cases} x=-t+1 \\ y=2t \\ z=-t+2 \end{cases}$ équivaut à $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$.

b) Donner un vecteur normal $\vec{n}$ *à* $\mathscr{P}$.

D'après l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$, on a: $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) Montrer que $\vec{n}$ *et* $\vec{u}$ *sont orthogonaux.*
Le produit scalaire $\vec{n}\cdot\vec{u} = -1\times3 + 2\times1 + (-1)\times(-1) = 0$

2) Montrer que tout point M de $\mathscr{D}$ *est un point de* $\mathscr{P}$.
Propriété valable pour tous les " objets " définis par une équation dans un repère) (relation d'égalité entre les coordonnées)
Un point appartient à cet " objet " d'équation donnée si et seulement si les coordonnées de ce point sont solutions (vérifient) l'équation.
Comme, pour tout réel t, $3(-t + 1) + 2t - (-t + 2) - 1 = 0$, l'équation de $\mathscr{P}$ est vérifiée par les coordonnées de tous les points de $\mathscr{D}$.
La droite $\mathscr{D}$ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

Autre méthode :
Puisqu'un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est orthogonal au vecteur normal $\vec{n}$ à $\mathscr{P}$, la droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$.
Le point $A(1; 0; 2)$ de $\mathscr{D}$ est un point de $\mathscr{P}$, car $3\times1 + 1\times0 - 1\times2 - 1 = 0$
Conclusion : La droite $\mathscr{D}$ est incluse dans $\mathscr{P}$.

3) Soit C(1; 3; 2)
a) Le point C est-il un point de $\mathscr{P}$*? Justifier.*
$3\times1 + 1\times3 - 1\times2 - 1 = 3$, donc l'équation de $\mathscr{P}$ n'est pas vérifiée par les coordonnées de C.
C n'appartient pas à $\mathscr{P}$.

b) Déterminer une équation du plan Q orthogonal à $\mathscr{D}$ *et passant par C.*
Un point $M(x; y; z) \in Q$ si et seulement si $\overrightarrow{CM}\cdot\vec{u} = 0$
On a donc: $(x - 1)\times(-1) + (y - 3)\times2 + (z - 2)\times(-1) = 0$
une équation du plan Q :
$-x + 2y - z - 3 = 0$ (ou $x - 2y + z + 3 = 0$)

c) Démontrer que le point I, point d'intersection de $\mathscr{D}$ et Q, a pour coordonnées $I(0; 2; 1)$

I appartient à $\mathscr{D}$ et I appartient à Q.

Ses coordonnées sont les solutions du système: $\begin{cases} x=-t+1 \\ y=2t \\ z=-t+2 \\ x-2y+z+3=0 \end{cases}$

On a donc: $(-t+1)-2(2t)+(-t+2)+3=0$, soit: $6t=6$.
$t=1$, puis: $x=-1+1=0$; $y=2$; $z=1$

4) Soit M un point de $\mathscr{D}$. (Les coordonnées de M sont $(-t+1;\ 2t;\ -t+2)$

a) Vérifier que $CM^2 = 6t^2 - 12t + 9$

$\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}-t+1-1\\2t-3\\-t+2-2\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}-t\\2t-3\\-t\end{pmatrix}$

$CM^2 = (-t)^2 + (2t-3)^2 + (-t)^2 = t^2 + 4t^2 - 12t + 9 + t^2 = 6t^2 - 12t + 9$

b) Justifier que CI est la valeur minimale de CM lorsque t parcourt $\mathbb{R}$.

Soit $g(t) = 6t^2 - 12t + 9$
Le minimum de ce trinôme du second degré est atteint quand $g'(t) = 0$, soit, $12t - 12t = 0$.
$t = 1$.
On retrouve le résultat du 3/.
(On peut mettre sous forme canonique: $g(t) = 6(t^2 - 2t + 1) + 3 = 6(t-1)^2 + 3$
Le minimum vaut 3 atteint lorsque $t = 1$)
Donc $CI = \sqrt{3}$ est la valeur minimale de CM lorsque t parcourt $\mathbb{R}$.
C'est la distance du point C au plan Q.

Remarque :
La distance d'un point C à un plan $\mathscr{P}$ est la distance la plus courte du point C à n'importe quel point M du plan $\mathscr{P}$.
C'est la longueur du segment $[CI]$ où I est le projeté orthogonal de C sur $\mathscr{P}$.

5) Soit A(1; 0; 2), déterminer la nature du triangle ACI.

Le point A est un point de $\mathscr{D}$ (on fait $t = 0$), donc, de $\mathscr{P}$
$\mathscr{D}$ est orthogonale à Q, d'où, la droite (AI) est orthogonale à Q et donc à toute droite de Q.
Le triangle CIA est donc un triangle rectangle en I

Autre méthode :
$CA^2 = (1-1)^2 + (0-3)^2 + (2-2)^2 = 9$
$CI^2 = 3$ (voir 4 b/)
$IA^2 = (0-1)^2 + (2-0)^2 + (1-2)^2 = 6$
Comme $IA^2 + CI^2 = CA^2$, le triangle CIA est un triangle rectangle en I

6) Calculer le réel f(t) = $\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MI}\|$ où M est le point défini à la question 4/

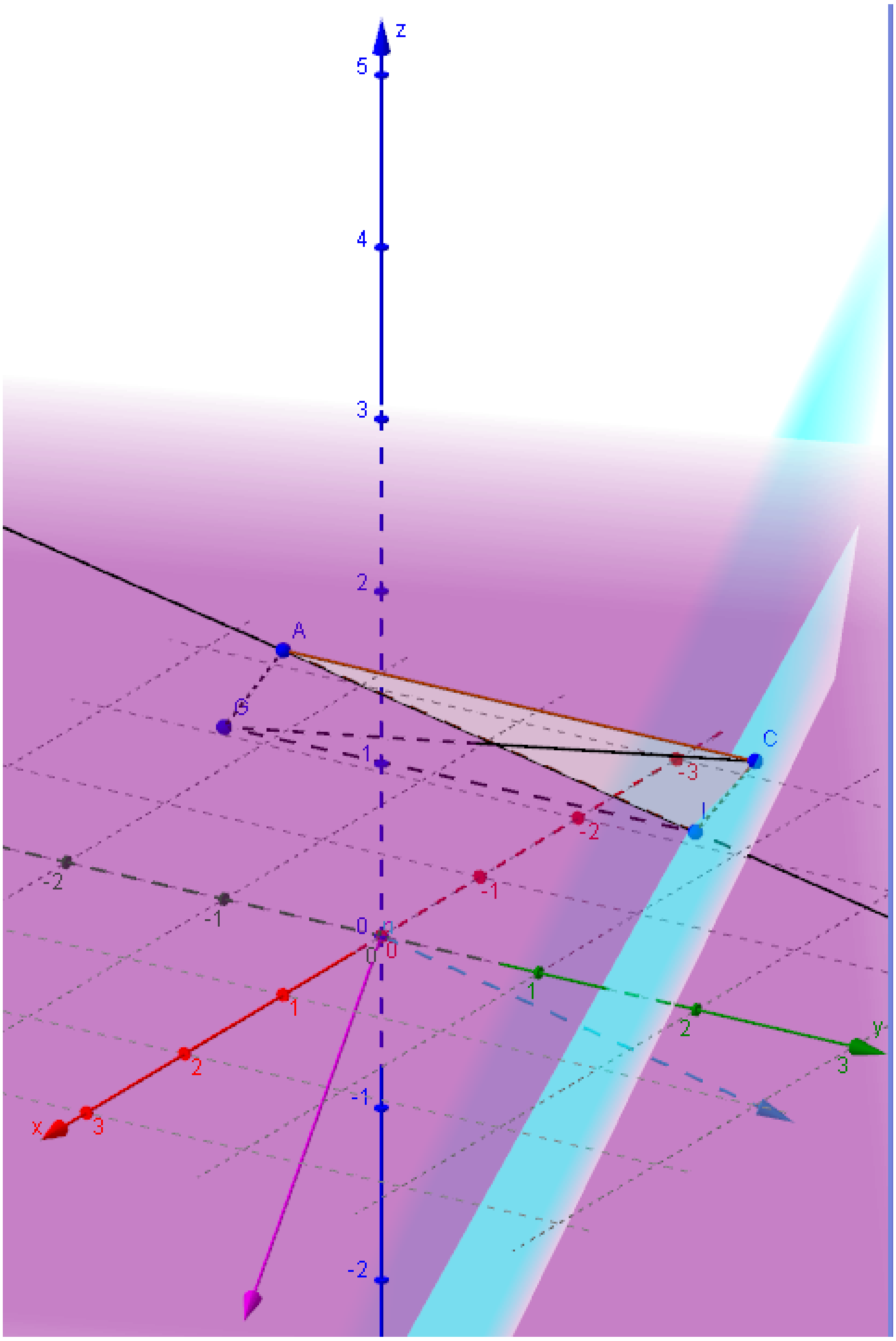
$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MI} = (1-1+1)\ \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MG}$
où G est le barycentre du système de points pondérés $\{(A; 1), (C; -1), (I; 1)\}$

Les coordonnées de G sont donc: $\begin{cases} x_G = \dfrac{1-1+0}{1-1+1} \\ y_G = \dfrac{0-3+2}{1-1+1} \\ z_G = \dfrac{2-2+1}{1-1+1} \end{cases}$, soit $G(0; -1; 1)$

$\overrightarrow{MG} \begin{pmatrix} t-1 \\ -1-2t \\ t-1 \end{pmatrix}$ et $\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MI}\| = \sqrt{(t-1)^2+(-1-2t)^2+(t-1)^2} = \sqrt{6t^2+3}$

Complément :
Construction de G :
Soit J le milieu de $[AI]$, on a :
G est le barycentre du système de points pondérés $\{(A; 1), (C; -1), (I; 1)\}$,
donc, G est le barycentre du système de points pondérés $\{(J; 2), (C; -1)\}$
On en déduit : $\overrightarrow{JG} = \dfrac{-1}{2-1} \overrightarrow{JC}$, soit : $\overrightarrow{JG} = \overrightarrow{CJ}$.
J est le milieu de $[CG]$.

($ACIG$ est un parallélogramme de centre J)


z
5
4
3
2
1
0
-1
-2
A
G
C
I
x
y
-3
-2
-1
1
2
3