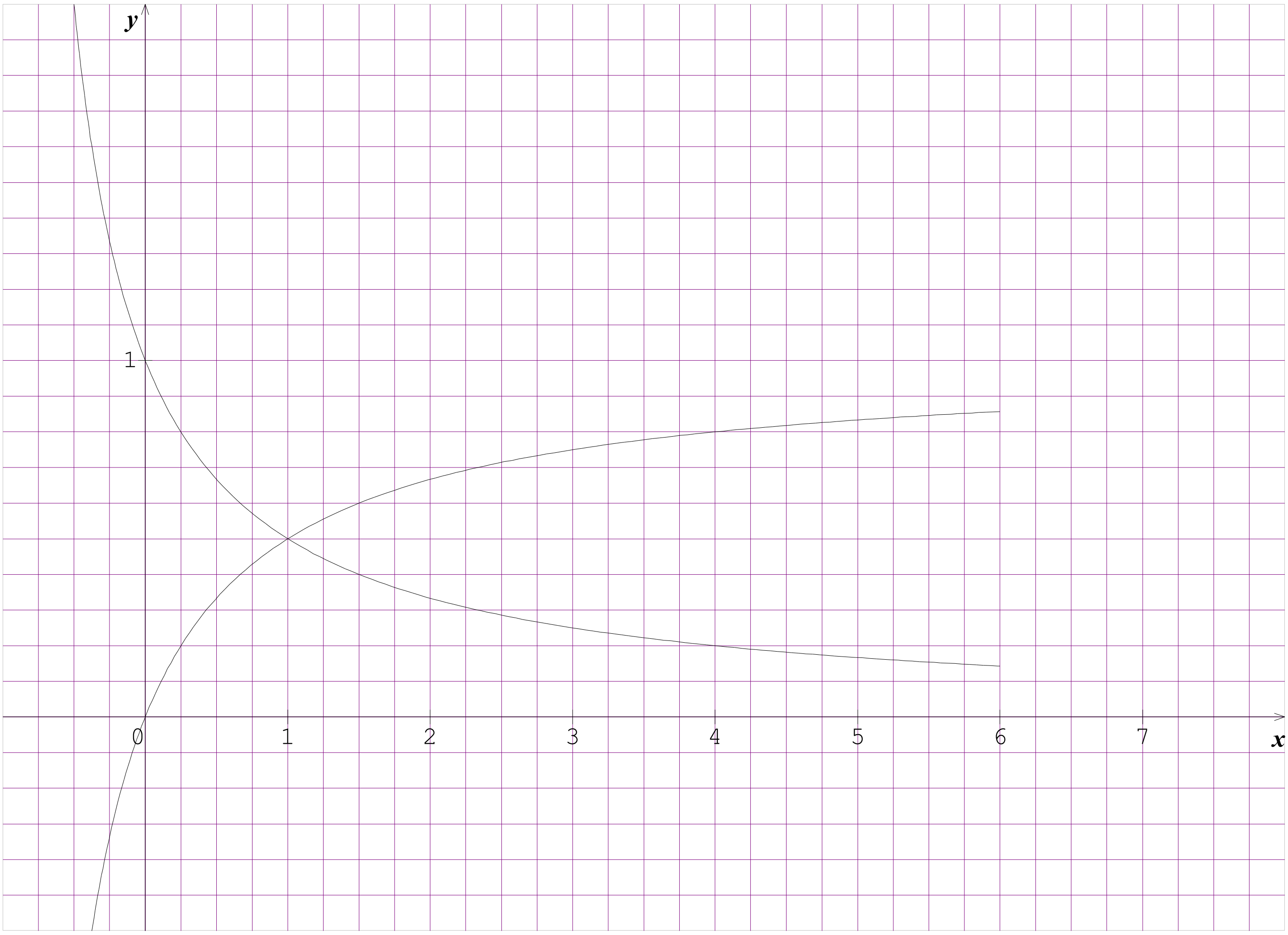
EXERCICE 1

On pose $I=\int_0^5 \frac{1}{1+t}\,dt$ et $J=\int_0^5 \frac{t}{1+t}\,dt$

Calculer $K=I+J$, puis I

En déduire J

Sur le graphique ci-dessous on a représenté les fonctions $x\mapsto\frac{1}{1+x}$ et $x\mapsto\frac{x}{1+x}$



Interpréter graphiquement les nombres *I, J* et *K*.

EXERCICE 2 *Antilles juin 2004*

On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_0=1$, $b_0=7$ et $\begin{cases} a_{n+1}=\frac{1}{3}(2a_n+b_n) \\ b_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n+2b_n) \end{cases}$

Soit (D) une droite munie d'un repère($O;\vec{i}$). Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on considère les points A_n et B_n d'abscisses respectives a_n et b_n .

1. Placez les points A_0 , B_0 , A_1 , B_1 , A_2 et B_2 .

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n=b_n-a_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Démontrez que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

Exprimez u_n en fonction de *n*.

Suite au verso

3. Comparez a_n et b_n . Étudiez le sens de variation des suites (a_n) et (b_n). Interprétez géométriquement ces résultats.
4. Démontrez que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
5. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = a_n + b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrez que (v_n) est une suite constante. En déduire que les segments [$A_n B_n$] ont tous le même milieu I.
6. Justifiez que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et calculez leur limite.
Interprétez géométriquement ce résultat.

EXERCICE 3 *(Pondichéry bac 2003)*
On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = a$, et, pour tout entier *n*, $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$ .où *a* est un réel donné tel que $0 < a < 1$.

1. On suppose dans cette question que $a = \dfrac{1}{8}$

a. Calculer u_1 et u_2 .
b. Dans un repère orthonormal (unité graphique 8 cm), tracer, sur l'intervalle [0 ; 2], la droite (*d*) d'équation $y = x$ et la courbe (*P*) représentative de la fonction: $f : x \mapsto x(2 - x)$.
c. Utiliser (*d*) et (*P*) pour construire sur l'axe des abscisses les points A_1 , A_2 , A_3 d'abscisses respectives u_1 , u_2 , u_3 .
2. On suppose dans cette question que *a* est un réel quelconque de l'intervalle]0 ; 1[.
a. Montrer par récurrence que, pour tout entier *n*, $0 < u_n < 1$.
b. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
c. Que peut-on en déduire?

3. On suppose à nouveau dans cette question que $a = \dfrac{1}{8}$

On considère la suite numérique (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = 1 - u_n$.
a. Exprimer, pour tout entier *n*, v_{n+1} en fonction de v_n .
b. En déduire l'expression de v_n en fonction de *n*.
c. Déterminer la limite de la suite (v_n), puis celle de la suite (u_n)

EXERCICE 1

On pose $I=\int_0^5 \frac{1}{1+t}\,dt$ et $J=\int_0^5 \frac{t}{1+t}\,dt$

Calculer $K=I+J$

D'après la linéarité de l'intégrale, K = $\int_0^5 \frac{1}{1+t}\,dt+\int_0^5 \frac{t}{1+t}\,dt=\int_0^5 \frac{1+t}{1+t}\,dt=\int_0^5 1\,dt=5$,

puis *I*. Comme la fonction $u:t\mapsto 1+t$ est une fonction strictement positive sur [0;5] et que $u'(t)=1$, on a:

$I=\int_0^5 \frac{1}{1+t}\,dt=\left[\ln(1+t)\right]_0^5=\ln 6$

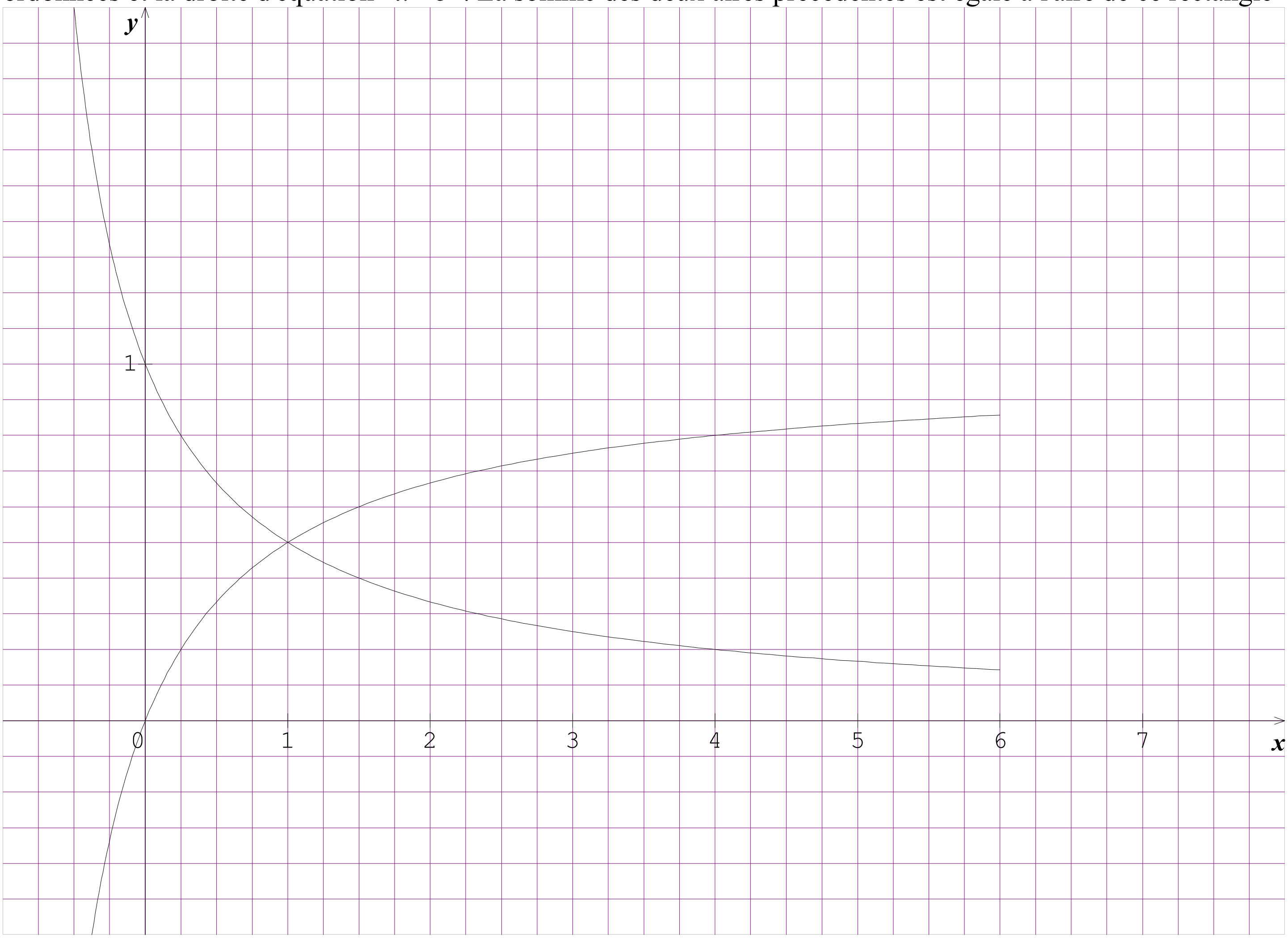
En déduire *J*: $J=K-I=5-\ln 6$

Sur le graphique ci-dessous on a représenté les fonctions $x\mapsto\frac{1}{1+x}$ et $x\mapsto\frac{x}{1+x}$

I est la mesure d'aire en u.a. de la surface délimitée par: l'axe des abscisses, la courbe C_1 , l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=5$

J est la mesure d'aire en u.a. de la surface délimitée par: l'axe des abscisses, la courbe C_2 , l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=5$

K est la mesure d'aire en u.a. du rectangle délimité par: l'axe des abscisses, la droite d'équation $y=1$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=5$. La somme des deux aires précédentes est égale à l'aire de ce rectangle



Remarque: Il ne suffit pas de faire quelques hachures. L'intégrale est un nombre réel. Vous hachurez un domaine du plan. Vous devez donner précisément ce que représente le nombre pour ce domaine.

EXERCICE 2 *Antilles juin 2004*

On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_0=1$, $b_0=7$ et $\begin{cases} a_{n+1}=\frac{1}{3}(2a_n+b_n) \\ b_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n+2b_n) \end{cases}$

Soit (D) une droite munie d'un repère($O;\vec{i}$). Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on considère les points A_n et B_n d'abscisses respectives a_n et b_n .

1. Placez les points A_0 , B_0 , A_1 , B_1 , A_2 et B_2 .

Remarque: Ne confondez pas les points A_n et les nombres (abscisses) a_n .

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n=b_n-a_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Démontrez que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n-2a_n+2b_n-b_n)=\frac{1}{3}u_n$

(u_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0=b_0-a_0=6$

Exprimez u_n en fonction de *n*.

On en déduit: Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$

Remarque: distinguez les définitions des propriétés.

Définition: (u_n) est une suite géométrique si, il existe un réel q tel que, pour **tout** entier naturel *n*, $u_{n+1}=qu_n.$

Propriété: Si (u_n) est une suite géométrique de raison *q* alors $u_n=u_k q^{n-k}$

3. Comparez a_n et b_n .

Comme $6>0$, $\frac{1}{3}>0$, alors, pour tout entier *n*, $u_n>0$

On en déduit: $b_n-a_n>0$, soit, $a_n<b_n$

Étudiez le sens de variation des suites (a_n) et (b_n).

$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{3}(2a_n+b_n)-a_n=\frac{1}{3}(b_n-a_n)=\frac{1}{3}u_n$ Comme $u_n>0$, $a_n<a_{n+1}$. (a_n) est une suite strictement croissante.

$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{3}(a_n+2b_n)-b_n=\frac{1}{3}(a_n-b_n)=\frac{-1}{3}u_n$ Comme $u_n>0$, $b_n>b_{n+1}$. (b_n) est une suite strictement décroissante.

Interprétez géométriquement ces résultats.

La suite des points A_n est une suite croissante sur la droite, celle des points B_n est une suite décroissante.

Les points A_n sont tous situés avant les points B_n .

L'intervalle $[A_{n+1}B_{n+1}]$ est donc inclus dans l'intervalle $[A_nB_n]$

Comme b_n-a_n est la longueur de l'intervalle $[A_nB_n]$. A chaque étape, la longueur est divisée par 3.

4. Démontrez que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

Il reste à montrer que la limite de la différence b_n-a_n est nulle.

Or, $0<\frac{1}{3}<1$, d'où, la suite géométrique (u_n) converge vers 0.

5. Soit (v_n) la suite définie par $v_n=a_n+b_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Démontrez que (v_n) est une suite constante.

$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{3}(2a_n+b_n)+\frac{1}{3}(a_n+2b_n)-a_n-b_n=0$ Pour tout entier naturel *n*, $v_{n+1}=v_n.$

La suite (v_n) est constante. Comme $v_0=8$, on a: Pour tout entier naturel *n*, $v_n=8$

Or, le milieu I de $[A_nB_n]$ a pour abscisse $\frac{a_n+b_n}{2}=\frac{v_n}{2}=4$.

Les segments [A_nB_n] ont donc tous le même milieu I.

6. Justifiez que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et calculez leur limite.

Puisque les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, elles sont convergentes vers la même limite *L*.
Cette limite *L* vérifie: $L+L=8$, d'après le 5). $L=4$
Interprétez géométriquement ce résultat.
Les intervalles $[A_n B_n]$ sont tous inclus les uns dans les autres et chacune des bornes A_n et B_n tend vers le point I d'abscisse 4.

EXERCICE 3 *(Pondichéry bac 2003)*
On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0=a$, et, pour tout entier *n*, $u_{n+1}=u_n(2-u_n)$ .où *a* est un réel donné tel que $0<a<1$.

1. On suppose dans cette question que $a=\frac{1}{8}$

a. Calculer u_1 et u_2 .
$u_1=\frac{1}{8}(2-\frac{1}{8})=\frac{15}{64}$ et $u_2=\frac{15}{64}(2-\frac{15}{64})=\frac{1695}{4096}$
b. Dans un repère orthonormal (unité graphique 8 cm), tracer, sur l'intervalle [0 ; 2], la droite (*d*) d'équation $y=x$ et la courbe (*P*) représentative de la fonction: $f: x \mapsto x(2-x)$.
$f'(x)=2(1-x)$, d'où, *f* est strictement croissante sur $[0;1]$
(P) est une parabole de sommet $\Omega(1;1)$ passant par $O(0;0)$ et $B(2;0)$
c. Utiliser (*d*) et (*P*) pour construire sur l'axe des abscisses les points A_1 , A_2 , A_3 d'abscisses respectives u_1 , u_2 , u_3 .
Remarquer: $u_{n+1}=f(u_n)$
Placer A_0 d'abscisse $a=\frac{1}{8}$. Faire apparaître le point de (*P*) d'abscisse *a* et reporter son ordonnée en abscisse par l'intermédiaire de (*d*). On obtient le point A_1 d'abscisse u_1 , puisque $u_1=f(a)$.
Recommencer pour A_2 d'abscisse $u_2=f(u_1)$ et A_3 d'abscisse $u_3=f(u_2)$.
2. On suppose dans cette question que *a* est un réel quelconque de l'intervalle]0 ; 1[.
a. Montrer par récurrence que, pour tout entier *n*, $0<u_n<1$.
L'analyse du 1.c) peut permettre de résoudre cette question. Si on a vu (au sens propre) sur le graphique que (P) a un maximum qui vaut 1 et que $u_{n+1}=f(u_n)$, la démonstration est (presque) évidente.
Soit P(n): $0<u_n<1$
* $u_0=a=\frac{1}{8}$ et $0<\frac{1}{8}<1$. $P(0)$ est vérifiée *(On ne vérifie pas u_0 . u_0 est un réel, il n'est ni vrai, ni faux. On vérifie une proposition)*
** Soit un entier p vérifiant $0<u_p<1$ (Hypothèse de récurrence)
Comme *f* est strictement croissante sur [0;1] et que $f(0)=0$ et $f(1)=1$, on obtient: $f(0)<f(u_p)<f(1)$, soit, $0<u_{p+1}<1$
On a montré: Si $P(p)$ alors $P(p+1)$
*** D'après l'axiome de récurrence la propriété est vraie pour tout entier naturel.
b. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
$u_{n+1}-u_n=u_n(2-u_n)-u_n=u_n(1-u_n)$
On sait d'après 2a), $u_n>0$ et $1-u_n>0$, d'où, $u_{n+1}-u_n>0$. Ce qui prouve que la suite (u_n) est croissante.
c. Que peut-on en déduire?
La suite (u_n) étant croissante et majorée est convergente.

3. On suppose à nouveau dans cette question que $a=\frac{1}{8}$

On considère la suite numérique (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n=1-u_n$.
a. Exprimer, pour tout entier *n*, v_{n+1} en fonction de v_n .
$v_{n+1}=1-u_{n+1}=1-2u_n+u_n^2=(1-u_n)^2=v_n^2$
b. En déduire l'expression de v_n en fonction de *n*.

Recherche d'une relation: $v_0=\frac{7}{8}$, $v_1=\left(\frac{7}{8}\right)^2$, $v_2=\left(\left(\frac{7}{8}\right)^2\right)^2=\left(\frac{7}{8}\right)^4$, $v_3=\left(\left(\frac{7}{8}\right)^4\right)^2=\left(\frac{7}{8}\right)^8$ ...

Montrons par récurrence que $v_n=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}=v_0^{2^n}$

* $v_0=v_0$ est vérifiée car $2^0=1$

** Soit un entier p tel que $v_p=v_0^{2^p}$ (Hypothèse de récurrence)

$v_{p+1}\overset{(1)}{=}\left(v_0^{2^p}\right)^2\overset{(2)}{=}v_0^{2^p}\times v_0^{2^p}\overset{(3)}{=}\left(v_0^2\right)^{2^p}\overset{(4)}{=}v_0^{2\times 2^p}=v_0^{2^{p+1}}$

(1) d'après le 3a) et l'hypothèse de récurrence

(2) d'après la définition du carré d'un nombre

(3) d'après $a^n b^n=(ab)^n$, en particulier, $a^n a^n=(a^2)^n$

(4) d'après $(a^n)^p=a^{np}$

*** D'après l'axiome de récurrence la propriété est vraie pour tout entier naturel.

autre méthode: posons $w_n=\ln v_n$

On a: $w_{n+1}=\ln v_{n+1}=2\ \ln v_n=2\ w_n$

(w_n) est une suite géométrique de raison 2, d'où, $w_n=\ln v_0\times 2^n$

$v_n=e^{\ln v_0\times 2^n}=v_0^{2^n}$

c. Déterminer la limite de la suite (v_n), puis celle de la suite (u_n)

on a: $\lim_{n\to+\infty} 2^n=+\infty$ et $\lim_{\alpha\to+\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^\alpha=0$, car, $0<\frac{7}{8}<1$, d'où, $\lim_{n\to+\infty} v_n=0$ (limite de fonction composée)

Comme $u_n=1-v_n$, on en déduit: $\lim_{n\to+\infty} u_n=1$