Exercice 1 :

I- *Répondre par vrai ou par faux. Justifier votre réponse*

1) Si f et g sont deux fonctions définies sur l'intervalle I vérifiant $f'=g'$ alors elles sont égales.

FAUX Contre-exemple: Les fonctions ($x \mapsto x+1$) et ($x \mapsto x$) ont la même fonction dérivée ($x \mapsto 1$)

2) u étant une fonction dérivable sur I, une primitive de $\frac{u'}{u}$ est ln ∘ u

FAUX. Contre-exemple: Lorsque $u<0$, une primitive de $\frac{u'}{u}$ est ln ∘ (–*u*).

Posons $f(x)=\frac{-2x}{-x^2-1}$

Soit $u(x)=-x^2-1$, la fonction *u* est définie et dérivable sur ℝ.

Pour tout *x* réel, $u'(x)=-2x$ et $\frac{-2x}{-x^2-1}=\frac{2x}{x^2+1}$. Un e primitive de *f* est $F:x \mapsto \ln(x^2+1)$

3) u étant une fonction dérivable sur I, une primitive de $u'e^u$ est e^u

VRAI La dérivée de e^u est $u'e^u$ d'après le théorème sur la dérivée des fonctions composées.

À analyser:

* Avant de dériver, il faut que la fonction soit définie...

Or, au 2), il ne suffit pas que *u* soit définie pour que ln ∘ *u* soit définie

alors qu'au 3), e^u est définie dès que *u* est définie.

** Un exemple ne peut pas suffire pour démontrer qu'une proposition est vraie

*** Ne modifier pas la proposition.

La question est: "la proposition donnée" est-elle vraie ou fausse.

Si vous introduisez une condition supplémentaire, vous modifiez la proposition.

Exercice 2 : **(**Franceseptembre2006)

On considère dans l'espace un cube de 3 cm de côté, noté ABCDEFGH et représenté sur l'annexe.

Soit I le barycentre des points pondérés (E;2) et (F;1), J celui de (F;1) et (B;2) et enfin K celui de (G;2) et (C;1).

On veut déterminer l'ensemble des points M équidistants de I, J et K. On note Δ cet ensemble.

1. Placer les points I, J et K sur la figure de l'annexe qui sera rendue avec la copie.

$\overrightarrow{EI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{GK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{GC}$

2. Soit Ω le point de Δ situé dans le plan (IJK). Que représente ce point pour le triangle IJK?

Ω est par construction équidistant des sommets *I*, *J*, *K* du triangle *IJK* dans le plan (*IJK*). *Ω* est donc le centre du cercle circonscrit au triangle *IJK*.

Pour la suite de l'exercice, on se place maintenant dans le repère orthonormal suivant: $(A;\frac{1}{3}\overrightarrow{AD},\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\frac{1}{3}\overrightarrow{AE})$

3. Donner les coordonnées des points I, J et K.

$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EI}$ et comme $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}$, on a: $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$. $I(0;1;3)$

$\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}$ et comme $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AE}$, on a: $\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$. $J(0;3;1)$

$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CK}$ et comme $\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AE}$, on a: $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$. $K(3;3;2)$

4. Soit P(2;0;0) et Q(1;3;3) deux points que l'on placera sur la figure. Démontrer que la droite (PQ) est orthogonale au plan (IJK).

$\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}-1\\3\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$. $\begin{cases}\overrightarrow{IJ} \text{ et } \overrightarrow{IK} \text{ non colinéaires}\\ \overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{IJ}=-1\times0+3\times2+3\times(-2)=0\\ \overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{IK}=-1\times3+3\times2+3\times(-1)=0\end{cases}$

Ce qui prouve que la droite (*PQ*) est orthogonale au plan (*IJK*)

Remarques:

* Il suffit de montrer que la droite (*PQ*) est orthogonale à deux droites sécantes du plan.

(On peut aussi faire (*PQ*) orthogonale à (*JK*) et une des autres droites (*IJ*) ou (*IK*).

$\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{JK}=-1\times3+3\times0+3\times1=0$)

En revanche, il ne suffit pas de montrer que (*PQ*) est orthogonale à une droite du plan (*IJK*)

** Lorsque vous construisez le raisonnement, n'inversez pas les propositions.

Par exemple: ici, on vous demande de prouver que *(PQ*) est orthogonale au plan (*IJK*).

La proposition utile est de la forme:

Si (Hypothèses = condition suffisante) alors (*PQ*) $\perp$ (*IJK*) (condition nécessaire).

À l'aide des données de l'exercice, on montre alors les hypothèses de cette proposition

Lorsque vous écrivez: Si (*PQ*) $\perp$ (*IJK*) alors ...

vous donnez une proposition qui s'appliquerait lorsque dans les données 'on sait ou on a montré ...) que (*PQ*) est orthogonale au plan (*IJK*)

5. Soit M un point de l'espace de coordonnées (x ; y ; z).

a. Démontrer que M appartient à Δ si,et seulement si, le triplet (x ; y ; z) est solution d'un système de deux équations linéaires que l'on écrira. Quelle est la nature de Δ ?

Une méthode

M appartient à Δ si et seulement si il est équidistant de *I* et *J* et équidistant de *I* et *K*.

M appartient à Δ si et seulement si il appartient au plan médiateur de [*IJ*] et au plan médiateur de [*IK*]

Comme $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ ne sont pas colinéaires, ces deux plans sont sécants et leur intersection Δ est une droite.

Équation du plan médiateur de [*IJ*]: le milieu de [*IJ*] a pour coordonnées (0;2;2) et on a:

$(x-0)\times0+(y-2)\times2+(z-2)\times(-2)=0$ On obtient: $y-z=0$ (1)

Équation du plan médiateur de [*IK*]: le milieu de [*IK*] a pour coordonnées $\left(-\frac{3}{2};2;-\frac{5}{2}\right)$ et on a:

$\left(x-\frac{3}{2}\right)\times3+(y-2)\times2+\left(z-\frac{5}{2}\right)\times(-1)=0$, on obtient: $3x+2y-z-6=0$ (2)

M appartient à Δ si,et seulement si, le triplet (*x* ; *y* ; *z*) est solution du système de deux équations linéaires $\begin{cases}y-z=0\\3x+2y-z-6=0\end{cases}$

ou encore

M est un point du plan médiateur de [*JK*].

Équation du plan médiateur de [*JK*]: le milieu de [*JK*] a pour coordonnées ($\frac{3}{2}$; 3; $\frac{3}{2}$) et $\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$, donc, on a:

$\left(x-\frac{3}{2}\right)\times 3+(y-0)\times 0+\left(z-\frac{3}{2}\right)\times 1=0$, soit, $3x+z-6=0$ (3)

Un système avec les équations (1) et (3), avec les équations (2) et (3) est sati faisant.

Une autre méthode

On a $MI = MJ$, d'où; $MI^2 = MJ^2$

$(x-0)^2+(y-1)^2+(z-3)^2 = (x-0)^2+(y-3)^2+(z-1)^2$

En développant et réduisant, on trouve (1)

De même avec $MI = MK$ qui mène à (2)

ou avec $MJ = MK$ qui mène à (3)

On en déduit que Δ est une droite de l'espace, car, Δ est l'intersection de deux plans sécants.

b. Vérifier que P et Q appartiennent à Δ. Tracer Δ sur la figure.

Les coordonnées de P et Q vérifient le système.

6.a. Déterminer un vecteur normal au plan (IJK) et en déduire une équation cartésienne de ce plan.

Le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ est un vecteur normal à (IJK) et par conséquent une équation de (IJK) est:

$-x+3y+3z+d=0$

Comme $I\in(IJK)$, on a: $0+3\times 1+3\times 3+d=0$, donc, $d=-12$

Une équation de (IJK) est: $-x+3y+3z-12=0$

Autres méthodes:

On peut aussi faire: $(x-x_I)\times(-1)+(y-y_I)\times 3+(z-z_I)\times 3=0$

ou encore

$(x-x_J)\times(-1)+(y-y_J)\times 3+(z-z_J)\times 3=0$

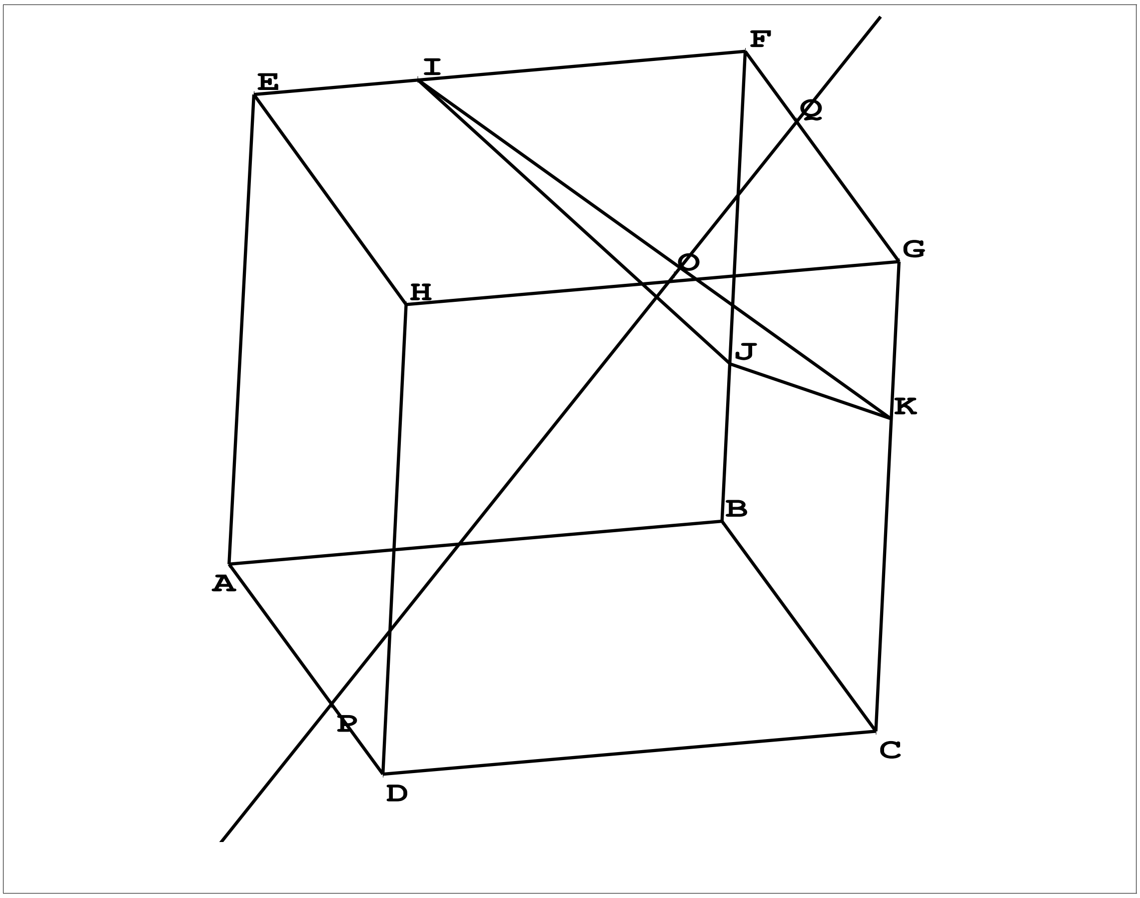
ou encore

$(x-x_K)\times(-1)+(y-y_K)\times 3+(z-z_K)\times 3=0$

b. Déterminer alors les coordonnées exactes de Ω.

Les coordonnées de Ω sont les solutions du système: $\begin{cases} y-z=0 \\ 3x+2y-z-6=0 \\ -x+3y+3z-12=0 \end{cases}$

on a $\begin{cases} y=z \\ 3x+y=6 \\ -x+6y=12 \end{cases}$ On en déduit: $19x=24$, $x=\frac{24}{19}$, puis, $y=\frac{42}{19}$ et $z=\frac{42}{19}$



Exercice 3 (Bac Asie juin 2007)

On désigne par a un réel strictement positif et différent de 1.
On se propose de rechercher, dans l'intervalle]0 ; +∞[, les solutions de l'équation (E_a): $x^a = a^x$

I Étude de quelques cas particuliers

1- Vérifier que les nombres 2 et 4 sont solutions de l'équation (E_2).

On considère l'équation (E_2), c'est-à-dire : $a = 2$, et, on cherche pour $x = 2$ et pour $x = 4$, si on obtient une égalité.
Si $a = 2$ et $x = 2$ alors $2^2 = 2^2$ est vrai
Si $a = 2$ et $x = 4$ alors $4^2 = 2^4$ est vrai
Par conséquent, les nombres 2 et 4 sont solutions de l'équation (E_2).

2- Vérifier que le nombre a est toujours solution de l'équation (E_a)

Si $x = a$ alors on a l'égalité $a^a = a^a$
Par conséquent, le nombre a est toujours solution de l'équation (E_a)

3. On se propose de démontrer que e est la seule solution de l'équation (E_{e}).
On note h la fonction définie sur l'intervalle]0 ; +∞[par h(x) = x −e.ln(x).

a. Question de cours : On rappelle que lorsque t tend vers +∞, alors $\frac{\mathrm{e}^t}{t}$ *tend vers +∞.*

Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Soit $x > 0$, on pose $t = \ln(x)$. On a alors, $\mathrm{e}^t = x$, d'où, $\frac{\ln(x)}{x} = \frac{t}{\mathrm{e}^t}$, Comme $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

La limite en $+\infty$ de $\dfrac{\ln(x)}{x}$ est la limite en $+\infty$ de $\dfrac{t}{e^t}$.

Comme la limite en $+\infty$ de la fonction inverse est 0, on obtient: $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$

b. Déterminer les limites de h en 0 et +∞.

$\lim_{x\to 0} h(x) = +\infty$ (somme de limites, aucune difficulté)

Pour la limite de h en $+\infty$, on factorise x, d'où, $h(x) = x(1 - e\dfrac{\ln(x)}{x})$, etc.

$\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

c. Étudier les variations de h sur l'intervalle]0 ; +∞[.

h est la somme de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$, donc, h est dérivable sur $]0; +\infty[$ et, pour tout $x > 0$,

$h'(x) = 1 - \dfrac{e}{x} = \dfrac{x-e}{e}$

On a donc: $h'(x) < 0$ sur $]0; e[$ et $h'(x) > 0$ sur $]e; +\infty[$

h est strictement décroissante sur $]0;e]$ et strictement croissante sur $[e; +\infty[$. $h(e) = ... = 0$

d. Dresser le tableau des variations de h et conclure quant aux solutions de l'équation (E_e)

x	0		e		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Soit $x > 0$, les solutions de l'équation (E_e) sont les solutions de:

$x^e = e^x$ qui équivaut à $e.\ln(x) = x$ qui équivaut à $h(x) = 0$

D'après l'étude de h, l'unique solution de (E_e) est e

II Résolution de l'équation (E_a)

1. Soit x un réel strictement positif. Montrer que x est solution de l'équation (E_a) *si et seulement si x est solution de l'équation :* $\dfrac{\ln(x)}{x} = \dfrac{\ln(a)}{a}$

$x > 0$, $a > 0$, $x^a = a^x \Leftrightarrow a.\ln(x) = x.\ln(a)$

Puisque x et a sont non nuls, on a: $a.\ln(x) = x.\ln(a) \Leftrightarrow \dfrac{\ln(x)}{x} = \dfrac{\ln(a)}{a}$

On a montré: $x^a = a^x \Leftrightarrow \dfrac{\ln(x)}{x} = \dfrac{\ln(a)}{a}$

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle]0 ; +∞[par : $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$

a. Déterminer les limites de f en 0 et +∞. Donner une interprétation graphique de ces deux limites.

$f(x) = \ln(x)\times\dfrac{1}{x}$, d'où, (limite du produit), $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

L'axe des ordonnées est donc asymptote à C_f.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (Voir I-3-a))

L'axe des abscisses est donc asymptote à C_f en $+\infty$.

b. Étudier les variations de f sur l'intervalle]0 ; +∞[.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x-\ln(x)}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

Comme $x^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - \ln(x)$.

$1 - \ln(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) < 1 \Leftrightarrow 0 < x < e$; $1 - \ln(x) < 0 \Leftrightarrow \ln(x) > 1 \Leftrightarrow x > e$; $1 - \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$.

f est donc strictement croissante sur]0; e] et strictement décroissante sur [e; +∞[

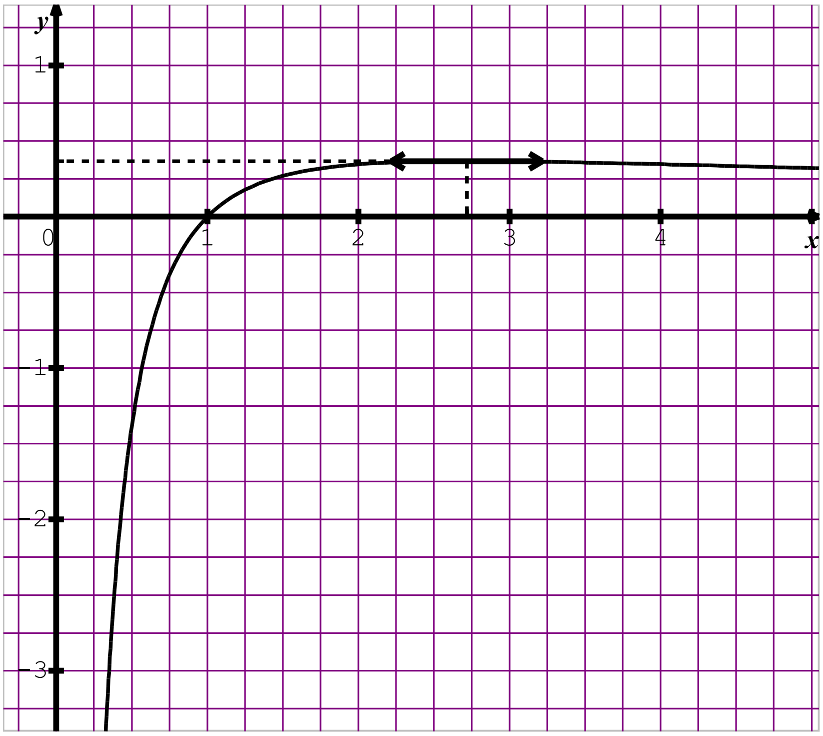
c. Dresser le tableau des variations de la fonction f.

$f(e) = \frac{1}{e}$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	–	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	1/e	↘	0

d. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$. (Unité : 2 cm). Commencer par placer le maximum et la tangente horizontale en ce point pour être certain de ne pas "déborder".

Il est évident que $f(1) = 0$



3. Justifier à l'aide des résultats précédents les propositions (P_1) et (P_2) suivantes :

(P_1) : si $a \in]0 ; 1]$, alors (E_a) admet l'unique solution a.

Si $a \in]0 ; 1]$ alors $\ln(a) \leqslant 0$, donc, $\frac{\ln(a)}{a} = k$ est un réel négatif ou nul.

Or, l'équation $f(x) = k$ avec $k \leqslant 0$ a une et une seule solution sur l'intervalle]0;1]

Cette solution est a (voir I-2)

(P_2) *: si a ∈]1 ; e[∪]e ; +∞[, alors* (E_a) *admet deux solutions a et b, l'une appartenant à l'intervalle*]1 ; e[et l'autre appartenant à l'intervalle]e ; +∞[.

si a ∈]1 ; e[∪]e ; +∞[, alors $\dfrac{\ln(a)}{a} = k$ est un réel strictement positif.

D'après l'étude de h , le maximum de h est $h(\mathrm{e}) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ atteint en e, donc, $h(a) = k < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$

Or, l'équation $f(x) = k$ avec $0< k < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ admet deux solutions, l'une sur]1 ; e[et l'autre sur]e ; +∞[.

ATTENTION:

f, étant une fonction définie sur un ensemble D_f et $a \in D_f$,

a étant donné, l'équation $f(x) = f(a)$ est de la forme $f(x) = \lambda$ avec λ constante réelle.

Il faut donc situer ce réel λ puis le rechercher dans les intervalles images et localiser la ou les solutions dans D_f .

Quelques exemples:

* f est la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ et $a = 2$.

L'équation $f(x) = f(2)$ a deux solutions: –2 et 2

** f est la fonction sinus définie sur $\mathbb{R}$ et $a = \dfrac{\pi}{3}$.

L'équation $f(x) = f(a)$ a une infinité de solutions: $\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$ et $\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$