Exercice 1 (Nouvelle-Calédonie 2005)

Q1	Pour tout n entier naturel non nul, pour tout réel θ, $\left(e^{i\theta}\right)^n$ est égal à :	$e^{in\theta}$	☐ Faux ☒ Vrai
		$\cos(\theta^n)+i\sin(\theta^n)$	☒ Faux ☐ Vrai
		$\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$	☐ Faux ☒ Vrai
Q2	La partie imaginaire du nombre z est égale à:	$\dfrac{z+\bar{z}}{2}$	☒ Faux ☐ Vrai
		$\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$	☐ Faux ☒ Vrai
		$\dfrac{z-\bar{z}}{2}$	☒ Faux ☐ Vrai
Q3	Soit z un complexe tel que $z=x+iy$ (x et y réels). Si z est un imaginaire pur, alors $\|z\|^2$ est égal à:	y^2	☐ Faux ☒ Vrai
		$-y^2$	☒ Faux ☐ Vrai
		$-z^2$	☐ Faux ☒ Vrai
Q4	A, B et C sont des points d'affixes respectives a, b et c telles que $\dfrac{b-a}{c-a}=i\sqrt{3}$, alors:	$BC=2AC$	☐ Faux ☒ Vrai
		$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$	☒ Faux ☐ Vrai
		$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=CA^2$	☐ Faux ☒ Vrai

Commentaires:

Q1: Règles sur les puissances: $\left(z^n\right)^m=z^{nm}$ et écriture trigonométrique d'un complexe: $e^{i\theta}$ est le complexe de module 1 et ayant un argument égal à θ . $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ (voir Formule de Moivre)

Q2: Rappel: La partie réelle et la partie imaginaire sont des nombres réels. Dans l'écriture algébrique d'un complexe $z=x+iy$, x et y sont des réels. La partie imaginaire de z est y.
$\dfrac{z+\bar{z}}{2}$ donne la partie réelle de z, $\dfrac{z-\bar{z}}{2}$ est un imaginaire pur

Q3: z étant un imaginaire pur, on a: $z=iy$. $|z|=|y|$ et $|z|^2=|y|^2=y^2$.
$|z|$ est le module du nombre complexe z et $|y|$ est la valeur absolue du réel y.
$z^2=(iy)^2=-y^2$, d'où, $y^2=-z^2$

Q4: $\dfrac{b-a}{c-a}=i\sqrt{3}$

En prenant les modules des complexes, on a: $\dfrac{AB}{AC}=\sqrt{3}$ et en prenant les arguments,

$(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

ABC est donc un triangle rectangle en A et $BC^2=AB^2+AC^2=AB^2+3AB^2=4AB^2$

Le projeté orthogonal de B sur (AC) est A, d'où, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=CA^2$

Exercice 2 (Nouvelle Calédonie Mars 2005)

X_i est la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si Claude est contrôlée au i-ème trajet et la valeur 0 sinon.

X_i suit donc une loi de Bernoulli de probabilité p, $P(X_i=1)=p$ et $P(X_i=0)=1-p$

X est la variable aléatoire définie par $X=X_1+X_2+X_3+...+X_{40}$

1) X est donc le **nombre de contrôles** de Claude en **40 trajets**. Les contrôles étant **indépendants**, X suit la loi binomiale de paramètres 40 et p. Pour tout entier k tel que $01\leq k\leq 40$, on a: $P(X=k)=\binom{40}{k}p^k(1-p)^{40-k}$

Remarque: k est le nombre de contrôles en 40 trajets

2) On suppose $p=\frac{1}{20}$

a) L'espérance mathématique de X est $E(X)=np=\frac{40}{20}=2$

b) $P(X=0)=\binom{40}{0}\left(\frac{1}{20}\right)^0\left(\frac{19}{20}\right)^{40}=\frac{19^{40}}{20^{40}}$ $P(X=1)=\binom{40}{1}\left(\frac{1}{20}\right)^1\left(\frac{19}{20}\right)^{39}=\frac{40\times 19^{39}}{20^{40}}=\frac{2\times 19^{39}}{20^{39}}$

$P(X=2)=\binom{40}{2}\left(\frac{1}{20}\right)^2\left(\frac{19}{20}\right)^{38}=\frac{40\times 39}{2}\frac{19^{38}}{20^{40}}=\frac{39\times 19^{38}}{20^{39}}$

c) Claude est contrôlé au plus deux fois: $P(X\leq 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$

La calculatrice donne: 0,676 7 à 10^{-4} près par défaut.

3) Soit Z la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain algébrique réalisé par le fraudeur.

Le fraudeur paie 100 euros lorsqu'il est contrôlé, d'où, $k\times 100$ euros pour $(X=k)$. Il dépense donc 100k euros où k est la valeur prise par la v.a. X sur 40 trajets.

A chaque trajet, le fraudeur économise 10 euros, d'où, 40×10 euros sur les 40 trajets. 400 euros est la somme "gagnée" pour 40 trajets.

Le gain algébrique est donc: $Z=400-100\mathrm{X}$

si $p=\frac{1}{5}$, on obtient: $E(Z)=E(400-100\mathrm{X})=400-100\,E(X)$. Or, $E(X)=\frac{40}{5}=8$ $E(Z)=-400$

4) a) $P(X\leq 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=(1-p)^{40}+40\times p\times(1-p)^{39}+780\times p^2(1-p)^{38}$

En factorisant $(1-p)^{38}$, on obtient:

$(1-p)^{38}[(1-p)^2+40\mathrm{p}(1-p)+780\mathrm{p}^2]=(1-p)^{38}(1-2\mathrm{p}+p^2+40\mathrm{p}-40\mathrm{p}^2+780\mathrm{p}^2)=$

$(1-p)^{38}(741\mathrm{p}^2+38\mathrm{p}+1)$

b) f est la fonction définie sur [0;1] par $f(x)=(1-x)^{38}(741\mathrm{x}^2+38\mathrm{x}+1)$

Remarque: *f est le produit de deux polynômes $u: x\mapsto(1-x)^{38}$ de degré 38 et d'un polynôme du second degré. f est un polynôme de degré 40.*

La dérivée de u est la dérivée d'une fonction composée: $x\mapsto 1-x\mapsto(1-x)^{38}$,

d'où, $u'(x)=-1\times 38(1-x)^{37}$

f est dérivable sur $[0;1]$ et, pour tout x réel de $[0;1]$,

$f'(x)=38\times(-1)\times(1-x)^{37}(741\mathrm{x}^2+38\mathrm{x}+1)+(1\,482\,x+38)(1-x)^{38}$

$f'(x)=-38(1-x)^{37}(741\mathrm{x}^2+38\mathrm{x}+1-39\,x-1+39\,x^2-1+x)=-38\,(1-x)^{37}780\mathrm{x}^2=-29640\mathrm{x}^2(1-x)^{37}$

On a donc $f'(x)<0$ si $x\in]0;1[$, $f'(0)=0$ et $f'(1)=0$

f est par conséquent strictement décroissante sur $[0;1]$

$f(0)=1$ et $f(1)=0$

f est **continue**, **strictement décroissante sur** $[0\,;1]$, d'où, f réalise une bijection de $[0\,;1]$ sur $\mathbf{[f(1)\,;f(0)]=[0\,;1]}$.

Comme 0,01 appartient à **l'intervalle image** $[0\,;1]$, il existe un unique réel x_0 dans l'intervalle antécédent $[0\,;1]$ tel que $f(x_0)=0{,}01$.

Sur la calculatrice, on lit: $f(0{,}19)\approx 0{,}01164$ et $f(0{,}20)\approx 0{,}00794$

On en déduit: $\frac{19}{100}<x_0<\frac{20}{100}$. $n=19$

c) $P(X\geq 3)=1-P(X\leq 2)$.

D'où, $P(X\geq 3)\geq\frac{99}{100}$ équivaut à $P(X\leq 2)\leq 0{,}01$

La valeur minimale de p est donc x_0 d'après l'étude de la fonction f.

Exercice 3 (Amérique du Sud Novembre 2004)

1) La solution f de l'équation différentielle $(E): y'+y=0$ et telle que $f(0)=e$ est la fonction $x\mapsto Ce^{-x}$ avec $Ce^0=e$, donc, $C=e$ (**Cours**: les solutions de $y'=ay$ sont les fonctions $x\mapsto Ce^{ax}$ avec $C\in\mathbb{R}$)

$f(x)=e\cdot e^{-x}=e^{1-x}$

2) $t\in[1\,;e]$

$e^{1-x}=t$ équivaut à $1-x=\ln t$ équivaut à $x=1-\ln t$ *Remarque:* $-\ln t=\ln\frac{1}{t}$

3) ***Complément:*** *A d'abscisse 0 a pour ordonnée* $f(0)=e$ $A(0\,;e)$

B d'abscisse 1 a pour ordonnée $f(1)=e^0=1$. $B(1\,;1)$

Un point M de l'arc $\widehat{AB}$ *a pour ordonnée* $t\in[1\,;e]$ *et pour abscisse x telle que* $f(x)=t$, *d'où,* $x=1-\ln t$ *d'après le 2).*

Soit H le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées, la longueur $HM=x=1-\ln t$

Le plan d'équation $y=t$ *coupe le solide de révolution selon un disque de rayon x, donc, d'aire* $\pi x^2=\pi(1-\ln t)^2$

Par conséquent: $V=\int_1^e \pi(1-\ln t)^2\,dt=\pi\int_1^e(1-\ln t)^2\,dt$

Posons $u'(t)=1$ et $v(t)=(1-\ln t)^2$

On en déduit: $u(t)=t$ et $v'(t)=2\times\frac{-1}{t}\times(1-\ln t)$

Comme u et v sont dérivables sur $[1\,;e]$ à dérivées continues, on a:

$$V=\pi\left\{\left[t(1-\ln t)^2\right]_1^e-\int_1^e 2\text{t}\,\frac{-1}{t}(1-\ln t)\,dt\right\}=\pi\left(-1+2\int_1^e(1-\ln t)\,dt\right)$$

Calcul de $\int_1^e(1-\ln t)\,dt$

Posons $u'(t)=1$ et $v(t)=1-\ln t$

On en déduit: $u(t)=t$ et $v'(t)=\frac{-1}{t}$

$$\int_1^e(1-\ln t)\,dt=[t(1-\ln t)]_1^e-\int_1^e t\,\frac{-1}{t}\,dt=-1+[t]_1^e=-1+e-1=e-2$$

$V=\pi(-1+2(e-2))=(2\text{e-}5)\pi$

Conseil: *Être très méthodique pour faire une double I.p.p.*