Exercice 1 : Amérique du Nord juin 2005

1. Dans le plan complexe, on donne les points *A*, *B* et *C* d'affixes respectives $-2+3\mathrm{i}$, $-3-\mathrm{i}$, $2{,}08+1{,}98\mathrm{i}$. Le triangle *ABC* est :
(b) : rectangle et non isocèle.
En effet, $\overrightarrow{AB}(-1;-4)$, $\overrightarrow{AC}(4{,}08;-1{,}02)$, d'où, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ et $AB\neq AC$
on peut aussi faire $\frac{c-a}{b-a}=\frac{4{,}08-1{,}02\mathrm{i}}{-1-4\mathrm{i}}=\frac{(4{,}08-1{,}02\mathrm{i})(-1+4\mathrm{i})}{17}=\frac{17{,}34\mathrm{i}}{17}$.
On obtient un imaginaire pur et son module est différent de 1,
d'où, $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{2}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}$ et $AB\neq AC$

2. À tout nombre complexe $z\neq-2$, on associe le nombre complexe z' défini par : $z'=\frac{z-4\mathrm{i}}{z+2}$
L'ensemble des points *M* d'affixe *z* tels que $|z'|=1$ est :
(b) : une droite.
En effet, soit $E(4\mathrm{i})$ et $F(-2)$.
$|z'|=1 \Leftrightarrow z\neq-2$ et $|z-4\mathrm{i}|=|z+2| \Leftrightarrow M\neq F$ et $EM=FM$ $\Leftrightarrow$ *M* appartient à la médiatrice de [*EF*] (Évidemment, *F* n'est pas sur la médiatrice de [*EF*])
autre méthode:
$|z'| = \frac{|z-4\mathrm{i}|}{|z+2|}$.
Posons $z = x + \mathrm{i}y$, on a alors: $|z-4\mathrm{i}| = \sqrt{x^2+(y-4)^2}$ et $|z+2| = \sqrt{(x+2)^2+y^2}$
On a alors l'égalité: $\sqrt{x^2+(y-4)^2} = \sqrt{(x+2)^2+y^2}$ qui mène à : $-8y + 16 = 4x + 4$ (équation de droites)

3. Les notations sont les mêmes qu'à la question 2.
L'ensemble des points *M* d'affixe *z* tels que *z'* est un réel est :
(c) : une droite privée d'un point.
En effet, z' est un réel $\Leftrightarrow$ $z\neq-2$ et ($z'=0$ ou $\arg(z-4\mathrm{i})-\arg(z+2)=0$ (modulo π)) $\Leftrightarrow$
$M\neq F$ et ($F=M$ ou $(\overrightarrow{FM},\overrightarrow{EM})=0$ (modulo π)) $\Leftrightarrow$ *M* appartient à la droite (*EF*) privée de *F*.
Rappel: *0 n'a pas d'argument, un angle orienté de vecteurs n'est défini que lorsque les vecteurs sont non nuls.*

autre méthode:
On pose $z = x + \mathrm{i}y$, on a alors: $z' = \frac{x+\mathrm{i}(y-4)}{(x+2)+iy} = \frac{(x+\mathrm{i}(y-4))((x+2)-iy)}{(x+2)^2+y^2} = ... + \mathrm{i}\ ...$
z' est réel si et seulement si $z \neq -2$ et sa partie imaginaire est nulle ....

4. Dans le plan complexe, on donne le point *D* d'affixe i. L'écriture complexe de la rotation de centre *D* et d'angle $\frac{-\pi}{3}$ est :
(a) : $z'=\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$.

En effet, l'écriture complexe de la rotation est: $z'-\mathrm{i}=\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}(z-\mathrm{i})$. Or, $\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

En développant et réduisant, il vient: $z'=\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$

Exercice 2 : Antilles juin 2004
On pose $z=-\sqrt{2+\sqrt{2}}+\mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}$
1. La forme algébrique de z^2 est :
B: $2\sqrt{2}-2\mathrm{i}\sqrt{2}$.

En effet, $z^2=(-\sqrt{2+\sqrt{2}})^2-(\sqrt{2-\sqrt{2}})^2-2\,\mathrm{i}(\sqrt{2+\sqrt{2}})(\sqrt{2-\sqrt{2}})=2+\sqrt{2}-2+\sqrt{2}-2\,\mathrm{i}\sqrt{2^2-2}=\ldots$

2. z^2 s'écrit sous forme exponentielle :
B : $4\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$
En effet, $|z^2|=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(-2\sqrt{2})^2}=\sqrt{8+8}=4$
et $\cos(\arg(z^2))=\dfrac{2\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\arg(z^2))=\dfrac{-2\sqrt{2}}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ....

3. z s'écrit sous forme exponentielle :
A : $2\,\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{8}}$
En effet, Puisque $|z^2|=4$ alors $|z|=2$, et, puisque $\arg(z^2)=-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}$ alors

$\arg(z)=-\dfrac{\pi}{8}+k\pi;k\in\mathbb{Z}$.

Comme la partie réelle de z est négative et sa partie imaginaire positive, $\arg(z)=\dfrac{7\pi}{8}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}$

4. $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ sont les cosinus et sinus de :
D : $\dfrac{\pi}{8}$
En effet, $\pi-\dfrac{7\pi}{8}=\dfrac{\pi}{8}$ d'où, les cosinus sont opposés et les sinus égaux.
Or, $z=-\sqrt{2+\sqrt{2}}+\mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ = $2\,\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{8}}$ = $2\left(\cos\dfrac{7\pi}{8}+\mathrm{i}\sin\dfrac{7\pi}{8}\right)$, donc, ...

Exercice 3 : Liban juin 2005
1. « Si a est un nombre réel quelconque et f une fonction définie et strictement décroissante sur $[a\,;+\infty[$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ »
Faux. Contre-exemple, soit $a>0$, la fonction inverse est strictement décroissante sur $[a;+\infty[$

2. Soient f et g deux fonctions définies sur $[0\,;+\infty[$, g ne s'annulant pas :
« Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-1$ ».
Faux. Contre-exemple : $f(x)=-x^3$ et $g(x)=x^2+1$

3. « Si f est une fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ telle que $0\leqslant f(x)\leqslant\sqrt{x}$ sur $[0\,;+\infty[$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ »
Vrai. Pour $x>0$, $0\leqslant\dfrac{f(x)}{x}\leqslant\dfrac{\sqrt{x}}{x}$, soit, $0\leqslant\dfrac{f(x)}{x}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et théorème des gendarmes.

4. On considère un repère $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$ du plan.
« Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ alors la droite d'équation $x=0$ est asymptote à la courbe représentative de f dans le repère $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$ ».
Faux. Contre-exemple: $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ n'est pas définie en 0. La limite à gauche en 0 est -1 et celle à droite est $+1$

5. « La fonction *f* définie sur ℝ par $f(x)=(x^2+3x+1)e^x$ est une solution sur ℝ de l'équation différentielle $y'-y=(2x+3)e^x$ ».
Vrai. *f* est de la forme *uv*, donc, ... $f'(x)=(2x+3)e^x+(x^2+3x+1)e^x$, CQFD

6. Soient A, B, C trois points du plan. On appelle I le barycentre des points A et B affectés respectivement des coefficients 3 et −2.
« Si G est le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 3,−2 et 1 alors G est le milieu du segment [CI] ».
Vrai.
Théorème d'associativité G est le le barycentre de {(A; 3); (B; –2); (C; 1)} et I celui de {(A; 3); (B; –2)}, d'où, G est celui de {(I; 3 –2); (C;1)} ...

7. Soient A, B, C trois points du plan et G le barycentre de A, B et C affectés respectivement des coefficients 3, −2 et 1
« L'ensemble des points *M* du plan tels que $\|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=1$ est le cercle de centre G et de rayon 1 ».
Faux.
$3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=(3-2+1)\overrightarrow{MG}=2\overrightarrow{MG}$.
On a alors: $MG=\frac{1}{2}$. L'ensemble des points est donc le cercle de centre G et de rayon $\frac{1}{2}$

8. Soient A et B deux points distincts du plan. On désigne par *M* un point quelconque du plan.
« Le produit scalaire $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ est nul si et seulement si *M* = A ou *M*= B ».
Faux. *M* décrit le cercle de diamètre [*AB*]

Exercice 4 : La Réunion juin 2004
Première partie
Pour réaliser des étiquettes de publipostage, une entreprise utilise deux banques de données :
B1, contenant 6000 adresses, dont 120 sont erronées et 5 880 sont exactes,
B2, contenant 4 000 adresses, dont 200 sont erronées et 3800 sont exactes.

Analyse des données: (on peut avantageusement faire un arbre)
D'après l'énoncé dans l'hypothèse d'équiprobabilité, en notant, les événements B1 (resp. B2) "l'adresse provient de la banque de données B1 (resp. B2)" et R "l'adresse est erronée" et X "l'adresse est exacte"
On a: $P(B1)=\frac{6000}{10000}=\frac{6}{10}=0{,}6$ $P(B2)=\frac{4000}{10000}=\frac{4}{10}=0{,}4$ $P_{B1}(R)=\frac{120}{6000}=\frac{12}{600}=\frac{1}{50}=0{,}02$
$P_{B1}(X)=\frac{5880}{6000}=\frac{588}{600}=0{,}98$ $P_{B2}(R)=\frac{200}{4000}=\frac{2}{40}=\frac{1}{20}=0{,}05$ $P_{B2}(X)=\frac{3800}{4000}=\frac{38}{40}=0{,}95$

1. On prélève au hasard, avec remise, 10 étiquettes parmi les 6 000 réalisées à l'aide de B1. La probabilité qu'exactement trois de ces étiquettes comportent une adresse erronée est :
C: $\binom{10}{3}\times\left(\frac{120}{6000}\right)^3\times\left(\frac{5880}{6000}\right)^7$
Puisqu'il y a remise, notons Y la variable aléatoire donnant le nombre d'étiquettes erronées.
Y suit la loi binomiale de paramètres (10, $\frac{120}{6000}$)
et P(Y=3) = $\binom{10}{3}\times\left(\frac{120}{6000}\right)^3\times\left(\frac{5880}{6000}\right)^7$

2. Parmi les 10 000 étiquettes, on en choisit une au hasard. Sachant que l'étiquette comporte une adresse exacte, la probabilité qu'elle ait été réalisée à l'aide de B1 est :

D: $\dfrac{0{,}6\times 0{,}98}{0{,}6\times 0{,}98+0{,}4\times 0{,}95}$

En effet, on cherche $P_X(B1)=\dfrac{P(X\cap B1)}{P(X)}$

Or, $P(X\cap B1)=P(B1)\times P_{B1}(X)=0{,}6\times 0{,}98$ et
$P(X)=P(X\cap B1)\cup P(X\cap B2)=0{,}6\times 0{,}98+0{,}4\times 0{,}95$

Deuxième partie

La durée de vie, exprimée en heures, d'un robot jusqu'à ce que survienne la première panne est modélisée par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle [0 ; +∞[(loi exponentielle de paramètre λ = 0,000 5). Ainsi la probabilité que le robot tombe en panne avant l'instant t est :

$p([0\,;t[)=\int_0^t \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ **Remarquer:** $\lambda=\dfrac{1}{2000}$ et $\dfrac{1}{\lambda}=2000$

1. La probabilité qu'un robot ait une durée de vie supérieure à 2 500 heures est :

A : $\mathrm{e}^{-\frac{2500}{2000}}$

En effet, une primitive de $x\mapsto \lambda e^{-\lambda x}$ est $x\mapsto -e^{-\lambda x}$.

$P([2500\,;+\infty[)=1-P([0\,;2500[)=1-(-\mathrm{e}^{-2500\lambda}-(-1))=\mathrm{e}^{-2500\lambda}$

2. La durée de vie moyenne d'un robot ménager est donnée par la formule $E=\lim\limits_{t\to+\infty}\int_0^t \lambda\,x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$

a) L'intégrale $\int_0^t \lambda\,x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ est égale à :

B : $-t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}-\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda}+\dfrac{1}{\lambda}$

Une Ipp avec $u(x)=x$ et $v'(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ (donc, $u'(x)=1$ et $v(x)=-e^{-\lambda x}$) donne

$I=\left[x(-\mathrm{e}^{-\lambda x})\right]_0^t - \int_0^t 1\times(-\mathrm{e}^{-\lambda x})\,\mathrm{d}x$.

Une primitive de de $x\mapsto -e^{-\lambda x}$ est $x\mapsto \dfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}$.

D'où, $I=\left[x(-\mathrm{e}^{-\lambda x})\right]_0^t - \left[\dfrac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^t = -t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}-0-\left(\dfrac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda t}-\dfrac{1}{\lambda}\right)$

Remarque:

La fonction F: $t\mapsto \int_0^t \lambda\,x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ est la primitive de la fonction f: $t\mapsto \lambda t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$ qui s'annule en 0.

b. La durée de vie moyenne des robots, exprimée en heures, est :

B : 2 000.

En effet, en mettant l'expression précédente au même dénominateur, il vient: $\dfrac{-\lambda t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}-\mathrm{e}^{-\lambda t}+1}{\lambda}$

Quand t tend vers +∞, –λ t tend vers –∞ et comme $\lim\limits_{X\to-\infty} X\,\mathrm{e}^X=0$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}\mathrm{e}^X=0$, on a:

$\lim\limits_{t\to+\infty}(-\lambda t)\mathrm{e}^{-\lambda t}=0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}=0$.

I tend vers donc $\dfrac{1}{\lambda}$