Exercice 1 ***Baccalauréat S Métropole&La Réunion\septembre2007***

Les parties 1 et 2 portent sur un même thème, la dérivation, mais sont indépendantes.

1.Restitution organisée de connaissances

La formule donnant la dérivée du produit de deux fonctions dérivables est supposée connue. On a énoncé ci-dessous deux propositions désignées par P et Q. Dire pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse et justifier.

Dans cet exercice n désigne un entier naturel strictement supérieur à 1.

–P: Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée sur $\mathbb{R}$ par: $f'(x) = nx^{n-1}$.

La proposition P est vraie.

Preuve: (démonstration par récurrence)

Initialisation: $n = 2$

$f(x) = x^2 = x\times x$

f est le produit des la fonction $x \mapsto x$ par elle-même dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée égale à 1.

Or on sait que $(uv)' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$, d'où,
$f'(x) = 1\times x + x\times 1 = 2x$.

Hérédité:
Soit un entier naturel $n \geqslant 2$ tel que la proposition P est vraie.
On a donc en hypothèse de récurrence:
$f(x) = x^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée sur $\mathbb{R}$ par: $f'(x) = nx^{n-1}$.

On étudie alors la proposition pour $n + 1$.
$f(x) = x^{n+1} = x^n\times x$

f est le produit des la fonction $x \mapsto x^n$ par $x \mapsto x$ dérivables sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = nx^{n-1} \times x + 1\times x^n = nx^n + x^n = (n + 1)x^n$

Conclusion:
La proposition est vraie à l'entier 2
On a montré: si la proposition est vraie à l'entier n alors elle est vraie à l'entier $n + 1$.
D'après l'axiome de récurrence la proposition est vraie pour tout entier supérieur ou égal à 2.

Autre preuve (utilisation de la définition du nombre dérivé en un point)

f est la fonction $x \mapsto x^2$

$(a + h)^2 = a^2 + 2ah + h^2$, d'où, $f(a + h) = f(a) + 2ah + h\times h$

Comme $\lim\limits_{h\to 0} h = 0$, on reconnaît le développement limité d'ordre 1 et le nombre dérivé de la fonction carré en a est $2a$.

f est la fonction x^n
On peut reprendre la démarche précédente.
(Quand le cours sur le développement du binôme aura été étudié, on pourra utiliser de la même façon se développement.

–Q: Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f = u^n$;alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée par $f' = nu^{n-1}$.

Q est fausse. (Se rappeler les fonctions composées)

Une preuve:

Si n = 2, $u^2 = u\times u = u'\times u + u'\times u = 2u'u$.

2. On désigne par g la fonction définie sur $]-1;1[$ par $g(0) = 0$ et $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ où g' désigne la dérivée de la fonction g sur $]-1;1[$; on ne cherchera pas à expliciter $g(x)$.

On considère alors la fonction composée h définie sur $]-\pi\,;0[$ par $h(x) = g(\cos x)$.

a. Démontrer que pour tout x de $]-\pi\,;0[$, on a $h'(x) = 1$, où h' désigne la dérivée de h.

h est la composée de la fonction cos suivie de la fonction g, d'où,

$h'(x) = \cos'(x)\times g'(\cos x) = -\sin x\times \dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$

Or, $1-\cos^2 x = \sin^2 x$ et comme $-\pi < x < 0$ alors $\sin x < 0$.

Par conséquent: $\sqrt{1-\cos^2 x} = -\sin x$ sur $]-\pi; 0[$

Conclusion: $h'(x) = -\sin x\times \dfrac{1}{-\sin x} = 1$

b. Calculer $h(-\dfrac{\pi}{2})$, puis, donner l'expression de $h(x)$.

Comme $\cos(-\dfrac{\pi}{2}) = 0$ et $g(0) = 0$ alors $h(-\dfrac{\pi}{2}) = 0$

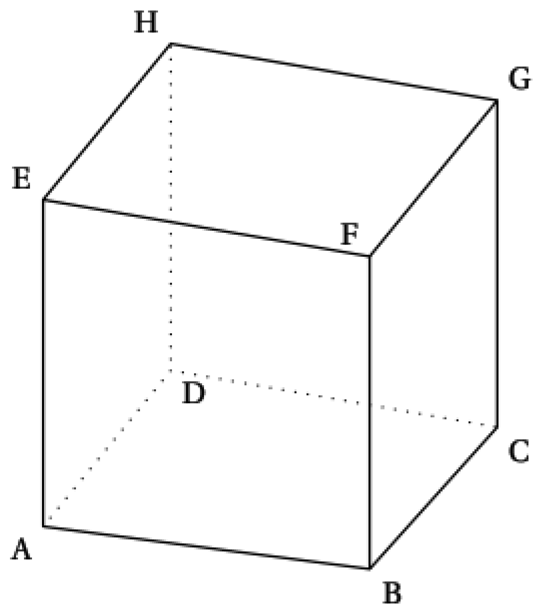
D'après 2a), $h(x) = x + C$ où $C \in \mathbb{R}$.

On en déduit donc: $C = \dfrac{\pi}{2}$

Conclusion: $h(x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 2 ***Baccalauréat S Polynésie septembre 2007***

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 3.



On choisit le repère orthonormal $(D;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{3}\ \overrightarrow{DA}$, $\vec{j} = \frac{1}{3}\ \overrightarrow{DC}$ et $\vec{k} = \frac{1}{3}\ \overrightarrow{DH}$.

1.a. Déterminer les coordonnées des points A, C et E.

On a: $\overrightarrow{DA} = 3\ \vec{i}$, d'où, A(3; 0; 0) dans le repère $(D;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

De même, C(0; 3; 0)

Comme $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DH}$, on a: E(3; 0; 3)

b. Déterminer les coordonnées du point L barycentre du système {(C;2), (E;1)}.

On a donc: (1 + 2) $\overrightarrow{DL} = 2\ \overrightarrow{DC} + 1\ \overrightarrow{DE}$, soit: $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{3}(2\ \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DE})$

$x_L=\frac{2x_A+x_E}{2+1} = 1$

$y_L = ... = 2$
$z_L = ... = 1$
L(1; 2; 1)

c. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DL}$.

$\overrightarrow{AE}\ \begin{pmatrix}3-3\\0-0\\3-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DL}\ \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

2. Soit(a, b) un couple de réels. On note M le point de la droite (AE) tel que $\overrightarrow{AM} = a\ \overrightarrow{AE}$ et, N le point de la droite (DL) tel que $\overrightarrow{DN} = b\ \overrightarrow{DL}$.

a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DL}$ si et seulement si le couple (a, b) vérifie le système: $\begin{cases}-a+2b=1\\3a-b=0\end{cases}$

Recherche des coordonnées de $\overrightarrow{MN}$

Par exemple: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = -a\ \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DA} + b\ \overrightarrow{DL}$

$\overrightarrow{MN}\ \begin{pmatrix}0-3+b\\0-0+2b\\-3a-0+b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b-3\\2b\\b-3a\end{pmatrix}$.

On a: $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{AE}$ si et seulement si $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AE} = 0$ si et seulement si $(b-3)\times 0 + 2b\times 0 + 3(b-3a)\times 3 = 0$

$\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{AE}$ si et seulement si $b - 3a = 0$, soit: $3a - b = 0$

et,

$\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{DL}$ si et seulement si $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{DL} = 0$ si et seulement si $(b-3)\times 1 + 2b\times 2 + (b-3a)\times 1 = 0$

$\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{DL}$ si et seulement si $-3 + 6b - 3a = 0$, soit: $-a + 2b = 1$

Conclusion:

$\overrightarrow{MN}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DL}$ si et seulement si le couple (a, b) vérifie le système: $\begin{cases}-a+2b=1\\3a-b=0\end{cases}$

b. En déduire qu'il existe un seul point M_0 de (AE) et un seul point N_0 de (DL) tels que la droite (M_0N_0) est orthogonale aux droites (AE) et (DL).

$$\begin{cases}-a+2b=1\\3a-b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3a+6b=3\\3a-b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5b=3\\3a-b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=\dfrac{3}{5}\\a=\dfrac{1}{5}\end{cases}$$

La droite (M_0N_0) est orthogonale aux droites (AE) et (DL) si et seulement si $\overrightarrow{M_0N_0}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DL}$

D'après 2a), les points M_0 et N_0 sont définis par les solutions du système, or, ce système a un et un seul couple solution , le couple ($\frac{1}{5}$; $\frac{3}{5}$)

c. Déterminer les coordonnées des points M_0 et N_0 puis calculer la distance M_0N_0.

$$\overrightarrow{DM}_0 = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM}_0 \quad \begin{pmatrix}3+\frac{1}{5}\times 0\\0+\frac{1}{5}\times 0\\0+\frac{1}{5}\times 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\\frac{3}{5}\end{pmatrix}$$, d'où, M_0 (3; 0; $\frac{3}{5}$)

$$\overrightarrow{DN}_0 \quad \begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{6}{5}\\\frac{3}{5}\end{pmatrix}$$, d'où, N_0 ($\frac{3}{5}$; $\frac{6}{5}$; $\frac{3}{5}$)

et $M_0N_0 = \sqrt{\left(\frac{3}{5}-3\right)^2+\left(\frac{6}{5}-0\right)^2+\left(\frac{3}{5}-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{1}{5}\sqrt{12^2+6^2} = \frac{6}{5}\sqrt{5}$

Remarque: la distance la plus courte entre deux droites de l'espace est la longueur du segment orthogonal à ces deux droites.

Exercice 3 *Baccalauréat S Amérique du Sud novembre 2007*

1. On considère la fonction f_1 définie sur [0; +∞[par $f_1(x) = 2x - 2 + \ln(x^2 + 1)$

a. Déterminer la limite de f_1 en +∞.

$\lim_{x\to+\infty} x^2+1 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, d'où, (limite de fonctions composées), $\lim_{x\to+\infty} \ln(x^2+1) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} 2x-2 = +\infty$

Par somme, $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty$.

b. Déterminer la dérivée de f_1 .

f_1 est la somme de u: $x \mapsto 2x - 2$ et de v: $x \mapsto \ln(x^2 + 1)$.

v est la composée de $x \mapsto x^2 + 1$ suivie de ln.

Ces fonctions étant dérivables sur [0; +∞[, on obtient: $f_1'(x) = 2 + 2x \times \dfrac{1}{x^2+1}$

c. Dresser le tableau de variations de f_1 .

$f_1(0) = 2\times 0 - 2 + \ln(0^2 + 1) = -2$
Comme $x \geqslant 0$, $f_1'(x) > 0$, d'où,

x	0	$+\infty$
$f_1'(x)$	$+$	
$f_1(x)$	-2 ↗	$+\infty$

2. Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n , définie sur [0; +∞[par

$$f_n(x) = 2x - 2 + \frac{\ln(x^2+1)}{n}$$

Remarquer: n est une constante strictement positive par rapport à la variable x définissant les fonctions f_n

a. Déterminer la limite de f_n en +∞.

L'étude du 1a) mène au même résultat, puisque $n > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{n} = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

b. Démontrer que la fonction f_n est strictement croissante sur [0; +∞[.

La même démarche qu'au 1b) donne $f_n'(x) = 2 + \dfrac{1}{n} \times 2x \times \dfrac{1}{x^2+1}$

et par conséquent f_n est strictement croissante sur [0; +∞[.

x	0	$+\infty$
$f_n'(x)$	$+$	
$f_n(x)$	-2 ↗	$+\infty$

c. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n sur [0; +∞[

On applique le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection)

Sur [0; +∞[,

f_n est dérivable, donc, continue

f_n est strictement croissante.

L'intervalle image [–2; +∞[contient 0,

le théorème s'applique.

l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n sur $[0; +\infty[$

d. Justifier que, pour tout entier naturel n, $0 < \alpha_n < 1$.

$f_n(0) = -2$, $f_n(1) = \dfrac{\ln 2}{n}$; comme $2 > 1$, $\ln 2 > 0$.

Comme $f_n(0) < 0 < f_n(1)$ et f_n est strictement croissante implique $0 < \alpha_n < 1$.

3. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$.

Une méthode:

α_{n+1} est le réel défini par $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$

Il s'agit donc de comparer: $f_n(\alpha_{n+1})$ et $f_{n+1}(\alpha_{n+1})$

Pour tout $x > 0$, $f_n(x) - f_{n+1}(x) = (2x - 2 + \dfrac{\ln(x^2+1)}{n}) - (2x - 2 + \dfrac{\ln(x^2+1)}{n+1})$

$$= \frac{\ln(x^2+1)}{n} - \frac{\ln(x^2+1)}{n+1} = \ln(x^2+1)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Or, $x > 0$ implique $x^2 + 1 > 0$, d'où, $\ln(x^2 + 1) > 0$

et $0 < n < n + 1$ implique $\dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1}$, d'où, $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} > 0$

Conclusion:

Pour tout $x > 0$, $f_n(x) > f_{n+1}(x)$, en particulier $f_n(\alpha_{n+1}) > f_{n+1}(\alpha_{n+1})$

Une autre méthode:

$f_n(\alpha_{n+1}) = 2\alpha_{n+1} - 2 + \dfrac{\ln(\alpha_{n+1}^2+1)}{n}$ (1)

Or α_{n+1} est le réel défini par $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 2\alpha_{n+1} - 2 + \dfrac{\ln(\alpha_{n+1}^2+1)}{n+1} = 0$ (2)

De cette égalité (2), on tire: $\ln(\alpha_{n+1}^2 + 1) = (2 - 2\alpha_{n+1})(n + 1)$

En remplaçant dans (1), on obtient: $f_n(\alpha_{n+1}) = 2\alpha_{n+1} - 2 + \dfrac{(2-2\alpha_{n+1})(n+1)}{n} = (2 - 2\alpha_{n+1})(-1 + \dfrac{n+1}{n})$

$f_n(\alpha_{n+1}) = \dfrac{1}{n}(2 - 2\alpha_{n+1})$

Comme, pour tout entier naturel n, $0 < \alpha_n < 1$, on a: $0 < \alpha_{n+1} < 1$, d'où, $2 - 2\alpha_{n+1} > 0$

Conclusion: $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$

4. Étude de la suite (α_n)

a. Montrer que la suite (α_n) est croissante.

D'après 3), pour tout entier naturel non nul n, $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$

Or, α_n est le réel défini par $f_n(\alpha_n) = 0$

On a donc: pour tout entier naturel non nul n, $f_n(\alpha_{n+1}) > f_n(\alpha_n)$

Comme f_n est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, on en déduit:

pour tout entier naturel non nul n, $\alpha_{n+1} > \alpha_n$

Conclusion: la suite (α_n) est croissante.

b. En déduire qu'elle est convergente.

La suite (α_n) est croissante et majorée par 1 (d'après l'inégalité montrée au 2.)

Elle est donc convergente.

c. Utiliser l'expression $\alpha_n = 1 - \dfrac{\ln(\alpha_n{}^2+1)}{2n}$ pour déterminer la limite de cette suite.

Puisque la suite (α_n) est convergente, il existe un réel l tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = l$.

On a successivement:

$\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n^2 + 1 = l^2 + 1$,

$\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(\alpha_n^2 + 1) = \lim\limits_{x\to l^2+1} \ln x = \ln(l^2 + 1)$ (limite de fonction composée et **continuité** de la fonction ln)

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$,

d'où, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln(\alpha_n^2 + 1))\times \dfrac{1}{n} = 0$

et, enfin: $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - (\ln(\alpha_n^2 + 1))\times \dfrac{1}{n} = 1$

Conclusion: $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$