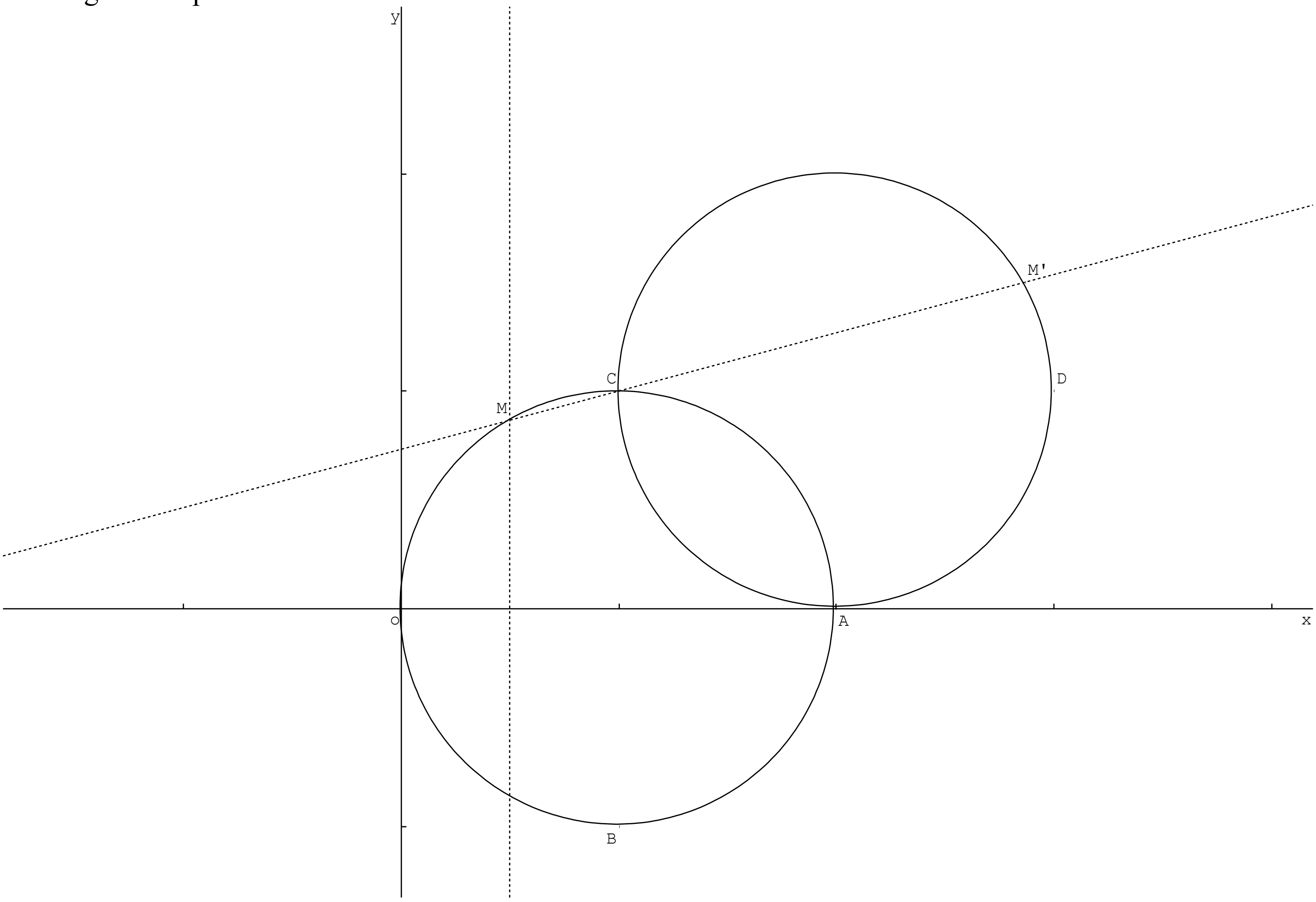
Exercice 1

1. a. Figure complétée au fur et à mesure



b. On a : $\dfrac{c-a}{b-a}=\dfrac{-1+i}{-1-i}=-i$ On en déduit: $c-a=-i(b-a)$ (i)

Désignons par r la rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$. On a alors: $C=r(B)$

Le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

Remarques: l'égalité (i) amène : $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{|c-a|}{|b-a|}=|-i|=1$ et

$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=(\vec{u},\overrightarrow{AC})-(\vec{u},\overrightarrow{AB})=arg(c-a)-arg(b-a)=arg\dfrac{c-a}{b-a}=arg(-i)=-\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

On peut aussi ici calculer "facilement" $AB=|b-a|=|-1-i|=\sqrt{2}$ et $AC=|c-a|=|-1+i|=\sqrt{2}$ et $BC=|c-b|=|2\mathrm{i}|=2$ ....

2. a. D'après le 1b), r est la rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

L'écriture complexe de la rotation r est : $z'-a=-i(z-a)$

L'affixe d du point $D=r(C)$ est donc : $d=-i(-1+i)+2=3+i$

b. Γ est le cercle de diamètre $[BC]$. Son image Γ' , par r, est donc le cercle de diamètre $[r(B)r(C)]=[CD]$.

3. a. Le centre du cercle Γ est le point Ω d'affixe 1. (Milieu de $[BC]$).

Le rayon de Γ est 1.

Comme $M\in\Gamma$, on a : $\Omega M=1$

C'est-à-dire :$|z-1|=1$

Notons θ un argument de $z-1$. ($\theta\in[0,2\pi[$) Ainsi : $z-1=e^{i\theta}$

Et comme $M\neq C$, on a $z\neq 1+i$, donc $z-1\neq i$, donc $\theta\neq\dfrac{\pi}{2}$ (2π).

Bilan : il existe $\theta \in [0, 2\pi[\setminus \{ \dfrac{\pi}{2} \}$ tel que $z = 1 + e^{i\theta}$

b. Comme $M' = r(M)$, on a :

$z' - a = -i(z - a)$ $\qquad$ $z' - 2 = -i(e^{i\theta} - 1)$ $\qquad$ $z' = 2 + i - ie^{i\theta}$

c. On a: $\dfrac{z' - c}{z - c} = \dfrac{1 - ie^{i\theta}}{-i + e^{i\theta}}$

Un nombre complexe Z est réel si et seulement si il est égal à son conjugué $\bar{Z}$.

D'après les règles de calculs avec les conjugués, on a :

$\overline{\left(\dfrac{z'-c}{z-c}\right)} = \dfrac{\overline{z'-c}}{\overline{z-c}} = \dfrac{1 + ie^{-i\theta}}{i + e^{-i\theta}}$ en multipliant numérateur et dénominateur par $-ie^{i\theta}$, on obtient:

$\overline{\left(\dfrac{z'-c}{z-c}\right)} = \dfrac{-ie^{i\theta} + 1}{e^{i\theta} - i} = \dfrac{z'-c}{z-c}$ Ce qui prouve le résultat demandé.

Rappel: Un argument d'un réel est 0 ou π à $2k\pi$ près On a alors: $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CM'}) = arg\left(\dfrac{z'-c}{z-c}\right) = 0(\pi)$

Les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CM}$ sont par conséquent colinéaires d'où l'alignement des points C, M et M'.

Autre méthode: Posons $e^{i\theta} = a = ib$ avec a et b réels vérifiant $a^2 + b^2 = 1$

$$\frac{z'-c}{z-c} = \frac{1 - ie^{i\theta}}{-i + e^{i\theta}} = \frac{1 - i(a + ib)}{-i + a + ib} = \frac{(b + 1 - ai)(a - i(b-1))}{a^2 + (b-1)^2} = \ldots = \frac{2a - i(a^2 + b^2) + i}{a^2 + (b-1)^2} = \frac{2a}{a^2 + (b-1)^2} \quad \ldots$$

d. Le point M a une affixe de la forme $z - 1 = e^{i\theta}$ On a donc : $\Omega M = |z - 1| = 1$

Donc M est un point de Γ tel que $(\vec{u}, \vec{\Omega} M) = \dfrac{2\pi}{3}$ (il suffit de reporter deux fois le rayon sur le cercle).

(On peut aussi remarquer que M est le point de Γ d'abscisse $1 + \cos\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$)

Pour construire son image, il suffit de placer M' sur Γ' tel que C, M et M' soient alignés.

Exercice 2

1) Les triangles OAB, OAC, OBC sont isométriques. (Un angle égal (angle droit en O) compris entre des côtés de même mesure ($OA=OB=OC$)).

On a donc: $AB = AC = BC = a\sqrt{2}$ (diagonale d'un carré ou théorème de Pythagore...)

ABC est un triangle équilatéral.

2) *Une méthode*: ***Avec le produit scalaire***: Évaluons $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IH}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB}$

Or, I, étant le pied de la hauteur issue de C dans le triangle équilatéral est le milieu de $[AB]$ et par conséquent la médiane (OI) du triangle OAB isocèle en O est aussi une hauteur relative à $[AB]$, d'où, (OI) est perpendiculaire à (AB). On a donc: $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

H, étant sur (CI) hauteur issue de C du triangle (ABC), on en déduit (IH) perpendiculaire à (AB). On a donc: $\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

Finalement: $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. Ce qui prouve l'orthogonalité des droites (OH) et (AB).

Une autre méthode: ***Avec un plan médiateur*:**

$OA=OB$, $IA=IB$, $CA=CB$ et O, I, C sont des points non alignés.

Le plan (OIC) est donc le plan médiateur de $[AB]$.

(AB) est par conséquent orthogonale au plan (OIC), donc, à toute droite incluse dans ce plan, en particulier, (OH)

Pour montrer que H est l'orthocentre de ABC, il reste à montrer que (AH) est perpendiculaire à (BC)

Une méthode: ***Avec le produit scalaire***: Évaluons $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OH})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{BC}$

Or, (*AO*) étant perpendiculaires à deux droites sécantes (*OB*) et (*OC*) est perpendiculaire au plan (*OBC*), donc, est orthogonale à toute droite de (*OBC*). On a donc: $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

On a aussi: (*OH*) perpendiculaire à (*CI*) et (*OH*) orthogonale à (*AB*), d'où, (*OH*) est perpendiculaire au plan (*ABC*) et donc, est orthogonale à toute droite de (*ABC*). On a donc: $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

Finalement: $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

Une autre méthode: (*OH*) est orthogonale à (*CI*) et (*AB*) droites sécantes du plan (*ABC*), donc, orthogonale au plan (*ABC*) et en particulier à (*BC*).

On a aussi (*BC*) orthogonale à (*AO*), donc, (*BC*) est perpendiculaire au plan (*AOH*), et, en particulier (*BC*) orthogonale à (*AH*)

Conclusion: *H,* étant le point d'intersection de deux hauteurs (*CI*) et (*AH*) du triangle *ABC* est l'orthocentre de ce triangle.

3) Calcul de *OH*.

a) Le volume *V* du tétraèdre est $V=\frac{1}{3}B\times h$ où *B* est l'aire d'une base et *h* la hauteur relative à cette base.

En prenant la base *AOB* et la hauteur *CO*, on a: $V=\frac{1}{3}\frac{AO\times BO}{2}\times CO=\frac{1}{6}a^3$

L'aire de *ABC* est $S=\frac{AB\times CI}{2}=\frac{a\sqrt{2}\times a\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ (rappel: la hauteur *h* d'un triangle équilatéral de côté *c* vaut $\frac{c\sqrt{3}}{2}$)

b) En prenant la base *ABC* et la hauteur correspondante *OH*, on a: $V=\frac{1}{3}S\times OH$, soit $OH=\frac{3\mathrm{V}}{S}$

On en tire: $OH=\frac{3\frac{1}{6}a^3}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}}=\frac{a}{\sqrt{3}}=a\frac{\sqrt{3}}{3}$

4) a) Par choix du repère, on a: *A(a,0,0)*, *B(0,a,0)* et *C(0,0,a)*

H, étant l'orthocentre du triangle équilatéral *ABC*, est aussi son centre de gravité et par conséquent:

$\overrightarrow{OH}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ Ainsi: $H(\frac{a}{3};\frac{a}{3};\frac{a}{3})$

b) Par construction , *D* est le symétrique de *H* par rapport à *O*, d'où, $D(\frac{-a}{3};-\frac{a}{3};-\frac{a}{3})$

$DA=\sqrt{(a+\frac{a}{3})^2+(\frac{a}{3})^2+(\frac{a}{3})^2}=a\sqrt{2}$ $DB=\sqrt{(\frac{a}{3})^2+(a+\frac{a}{3})^2+(\frac{a}{3})^2}=a\sqrt{2}$

$DC=\sqrt{(\frac{a}{3})^2+(\frac{a}{3})^2+(a+\frac{a}{3})^2}=a\sqrt{2}$ On a bien: $AB=AC=BC=AD=BD=CD=a\sqrt{2}$

c) ***Observations géométriques***:

* *H* est le centre du cercle circonscrit à *ABC* (car, équilatéral).

Ω , étant le centre de la sphère circonscrite à *ABCD*, on a: (ΩH) perpendiculaire au plan (*ABC*), or, (*OH*) est perpendiculaire à ce plan (*ABC*). L'unicité de la perpendiculaire en un point à un plan prouve que Ω est sur (*OH*).

** ABCD, étant un tétraèdre régulier, Ω est l'isobarycentre de *A, B*, *C*, *D* et par conséquent:

$4\overrightarrow{O\Omega}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$

Or, *H*, étant l'isobarycentre des points *A*, *B*, *C*, on a: $3\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

On a aussi: $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OH}$ d'où, $\overrightarrow{O\Omega}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OH}$ (ce qui permet de conclure)

*** Ω , étant le centre de la sphère circonscrite à *ABCD*, est équidistant des points *A*, *B*, *C*, *D*.

Ω est donc un point du plan médiateur de [*AB*], soit, (*OCI*) (voir 2)

Ω est donc un point du plan médiateur de [*AC*], soit, (*ODH*) ($OA=OC$, $DA=DC$, $HA=HC$ (*ABC* équilatéral, l'orthocentre *H* est centre du cercle circonscrit).

Ω est donc un point de la droite d'intersection des plans (*OCI*) et (*ODH*), donc, de (*OH*) (*H* est un point de (*CI*))

Remarque: (*AOH*) est le plan médiateur de [*BC*] et coupe les plans précédents selon (*OH*). Il est nécessaire pour déterminer Ω de faire intervenir le point *D*.

On en déduit qu'il existe un réel λ tel que $\vec{O}\Omega=\lambda\overrightarrow{OH}$

Ω a pour coordonnées $(\lambda\frac{a}{3};\lambda\frac{a}{3};\lambda\frac{a}{3})$

Comme $\Omega D^2=\Omega A^2$, on obtient la relation: $3(\frac{-a-\lambda a}{3})^2=(a-\lambda\frac{a}{3})^2+2(-\lambda\frac{a}{3})^2$

$3(1+\lambda)^2=(3-\lambda)^2+2\lambda^2$

$3(1+2\lambda+\lambda^2)=9-6\lambda+\lambda^2+2\lambda^2$

$\lambda=\frac{1}{2}$ Ω $(\frac{a}{6};\frac{a}{6};\frac{a}{6})$

Ω est le milieu de [*OH*]

***** *Autre méthode (dans un repère orthonormal)*: Posons (*x,y,z*) les coordonnées de Ω

On peut poser trois équations: $\Omega A^2=\Omega B^2$ (1)

$\Omega A^2=\Omega C^2$ (2)

$\Omega A^2=\Omega D^2$ (3)

(1) donne $x=y$ (faire le calcul simplification évidente)

(2) donne $x=z$ (faire le calcul simplification évidente)

(3) donne $(x-a)^2+y^2+z^2=(x+\frac{a}{3})^2+(y+\frac{a}{3})^2+(z+\frac{a}{3})^2$

Comme $x=y=z$, (3) se simplifie bien et donne $x=\frac{a}{6}$ ....

Problème

Partie A

1) D'après le cours les solutions de l'équation différentielle $y'=ay$ sont les fonctions $t\mapsto Ce^{at}$ où *C* est une constante réelle. Comme $f(0)=N_0$, on en déduit: $C=N_0$ Conclusion: $f(t)=N_0e^{at}$

2) Soit *T* le temps de doublement, d'où, $f(T)=2\mathrm{N}_0$ et $f(T)=N_0e^{aT}$

Par comparaison, on en déduit: $2\mathrm{N}_0=N_0e^{aT}$, soit, $2=e^{aT}$

En appliquant la fonction ln aux deux membres de l'égalité, il vient: $aT=\ln 2$, puis, $a=\frac{\ln 2}{T}$

Finalement: $f(t)=N_0e^{\frac{\ln 2}{T}t}=N_0\left(e^{\ln 2}\right)^{\frac{t}{T}}=N_0 2^{\frac{t}{T}}$

Partie B

1) a) Soit g vérifiant (E): $g'(t)=ag(t)\left(1-\frac{g(t)}{M}\right)$

Calculons l'expression $\left(\frac{1}{g}\right)'+a\left(\frac{1}{g}\right)$

$$\left(\frac{1}{g}\right)'+a\left(\frac{1}{g}\right)=\frac{-g'}{g^2}+a\left(\frac{1}{g}\right)=\frac{ag\left(1-\frac{g}{M}\right)}{g^2}+a\left(\frac{1}{g}\right)=\frac{a-\frac{ag}{M}-a}{g}=\frac{a}{M}$$

Si g est solution de (E) alors $\left(\frac{1}{g}\right)$ est solution de (E'): $y'+ay=\frac{a}{M}$

b) On sait (cours) que les solutions de (E'): $y'=-ay+\frac{a}{M}$ sont les fonctions: $t\mapsto K\,e^{-at}+\frac{\frac{-a}{M}}{-a}$

$t\mapsto K\,e^{-at}+\frac{1}{M}$ où $K\in\mathbb{R}$

c) Soit h une fonction strictement positive vérifiant (E'). On a donc: $h'=-ah+\frac{a}{M}$

Calculons $\left(\frac{1}{h}\right)'$ ($h>0$ permet de poser $\frac{1}{h}$)

$$\left(\frac{1}{h}\right)'=\frac{-h'}{h^2}=\frac{-(-ah+\frac{a}{M})}{h^2}=a\left(\frac{1}{h}\right)\left[1-\left(\frac{1}{h}\right)\left(\frac{1}{M}\right)\right]$$

Si h et h strictement positive vérifie (E') alors $\frac{1}{h}$ vérifie (E)

2) Pour tout réel t positif, $g(t)=\frac{M}{1+C\,e^{-at}}$ avec $C>1$

Remarque: pour des fonctions strictement positives, on a montré l'équivalence: h solution de (E') équivaut à $\frac{1}{h}$ solution de (E)

Autrement dit: $g=\frac{1}{h}$ avec h définie au 1b)

Comme $h(t)=K\,e^{-at}+\frac{1}{M}=\frac{KM\,e^{-at}+1}{M}$ on a bien: $g(t)=\frac{M}{1+C\,e^{-at}}$ où $C=KM$

a) $g>0$, car, C, M, et l'exponentielle sont strictement positives.

limite en $+\infty$: Comme $a>0$, $\lim\limits_{t\to+\infty}(-at)=-\infty$ et comme $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$, on a: $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-at}=0$

Il s'en suit: $\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)=M$

Si on a remarqué le lien avec le 1), on a: h est une fonction strictement décroissante sur $[0;+\infty[$ *à valeurs dans* $\left]\frac{1}{M};K+\frac{1}{M}\right]$

d'où, $g=\frac{1}{h}$ *est une fonction strictement croissante.*

Comme $\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)=M$ *, on a:* $g(t)<M$

Sinon, on peut traiter algébriquement l'inégalité, étape par étape

$t\geq 0$ et $a>0$, d'où, $-at\leq 0$. L'exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs strictement positives,

on a: $0<e^{-at}\leq 1$, puis en multipliant par $C>1$ chaque membre et en ajoutant 1, $1<Ce^{-at}+1\leq 1+C$

La fonction inverse étant strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, on obtient: $1>\frac{1}{Ce^{-at}+1}\geq\frac{1}{1+C}$

Et comme $M>0$, on en conclut: $M>\frac{M}{Ce^{-at}+1}\geq\frac{M}{1+C}>0$

b) De l'inégalité 2a), on a: $\frac{g(t)}{M}<1$, donc, $1-\frac{g(t)}{M}>0$.

$a>0$, $g(t)>0$, $1-\frac{g(t)}{M}>0$ et $(E):$ $g'(t)=ag(t)\left(1-\frac{g(t)}{M}\right)$ donne $g'(t)>0$

La dérivée de *g* étant strictement positive la fonction *g* est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

On peut aussi calculer la dérivée de g. g est de la forme $M\times\frac{1}{v}$ *où v est la fonction* $v:t\mapsto 1+Ce^{-at}$ *. v est dérivable sur* $[0;+\infty[$ *et à valeurs strictement positives, car, la fonction exponentielle est dérivable sur* $[0;+\infty[$ *et comme la fonction inverse est dérivable sur* $]0;+\infty[$ *, alors, g est dérivable et* $g'=M\times\frac{-v'}{v^2}$

On a: $v':t\mapsto -Cae^{-at}$ *et* $g'(t)=\frac{MCae^{-at}}{(1+Ce^{-at})^2}$ qui est strictement positive...

et, beaucoup plus simplement, la fonction *v* étant strictement décroissante sur $[0;+\infty[$ suivie de la fonction inverse strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, on obtient, puisque $M>0$, la fonction *g* est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

g est définie et dérivable sur $[0;+\infty[$, donc, *g* est continue sur $[0;+\infty[$

g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

$g(0)=\frac{M}{1+C}$ et $\lim_{t\to+\infty} g(t)=M$

On en déduit que *g* réalise une bijection de g $[0;+\infty[$ sur $\left[\frac{M}{1+C},M\right[$

Or, $C>1$, d'où, $C+1>2$ et $\frac{M}{C+1}<\frac{M}{2}$

Comme $\frac{M}{2}\in\left[\frac{M}{1+C},M\right[$, il existe un unique réel t_0 de $[0;+\infty[$ tel que $g(t_0)=\frac{M}{2}$

c) On sait: $g'=ag(1-\frac{g}{M})$, d'où, en dérivant chaque membre, on obtient:

$$g''=ag'(1-\frac{g}{M})+ag\left(-\frac{g'}{M}\right)=ag'\left(1-\frac{2g}{M}\right)$$

Comme $a>0$, $g'>0$, le signe de g'' est celui de $\left(1-\frac{2g}{M}\right)$.

Comme *g* est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et que $g(t_0)=\frac{M}{2}$, on en déduit:

si $0\leq t<t_0$, alors, $g(t)<\frac{M}{2}$, soit, $\frac{2g(t)}{M}<1$. $g''>0$ sur $[0;t_0[$

et on montre de même, $g''<0$ sur $]t_0;+\infty[$ $g''(t_0)=0$

La dérivée de g' s'annule en changeant de signe en t_0, et, comme $g''<0$ sur $]t_0;+\infty[$, la vitesse d'accroissement des bactéries donnée par g' est bien décroissante à partir de l'instant t_0.

Comme $g(t_0)=\frac{M}{2}$, on a: $\frac{M}{2}=\frac{M}{1+Ce^{-at_0}}$ On en tire: $1+Ce^{-at_0}=2$, puis, $e^{-at_0}=\frac{1}{C}$

En appliquant la fonction ln, on obtient $-at_0=\ln(\frac{1}{C})=-\ln C$ $t_0=\frac{\ln C}{a}$

d) Le nombre moyen de bactéries est: $\mu=\frac{1}{t_0-0}\int_0^{t_0} g(t)\,dt$

Il s'agit de déterminer une primitive G de g. Or, $g(t)=\frac{M}{1+Ce^{-at}}=\frac{Me^{at}}{e^{at}+C}$

Posons $u(t)=e^{at}+C$. donc, $.u'(t)=a\,e^{at}$ u, étant strictement positive, une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln u$

$G(t)=\frac{M}{a}\ln(e^{at}+C)$ $G(t_0)=\frac{M}{a}\ln(e^{at_0}+C)$; avec $e^{at_0}=C$, donc, $G(t_0)=\frac{M}{a}\ln(2\mathrm{C})$

$G(0)=\frac{M}{a}\ln(1+C)$ et $\frac{1}{t_0}=\frac{a}{\ln C}$

Finalement: $\mu=\frac{a}{\ln C}(G(t_0)-G(0))=\frac{a}{\ln C}\frac{M}{a}\ln\frac{2\mathrm{C}}{1+C}=\frac{M}{\ln C}.\ln\frac{2\mathrm{C}}{1+C}$

Partie C

1) $f(0)=1$ et (***voir partie A***) $f(0)=N_0$. On en déduit $N_0=1$

$f(0{,}5)=2$ et $f(t)=N_0 2^{\frac{t}{T}}$ d'où, $f(0{,}5)=2^{\frac{1}{2\mathrm{T}}}=2$

Par conséquent: $\frac{1}{2\mathrm{T}}=1$. $T=\frac{1}{2}$ et comme $a=\frac{\ln 2}{T}$, on trouve $a=2\ln 2=\ln 4$

2) (***voir partie B, 2***) $g(0)=N_0=1=\frac{M}{1+C}$ et $M=100\mathrm{N}_0=100$, d'où, $\frac{100}{1+C}=1$, donc $C=99$

$g(t)=\frac{100}{1+99e^{-(\ln 4)t}}=\frac{100}{1+99\times 4^{-t}}$

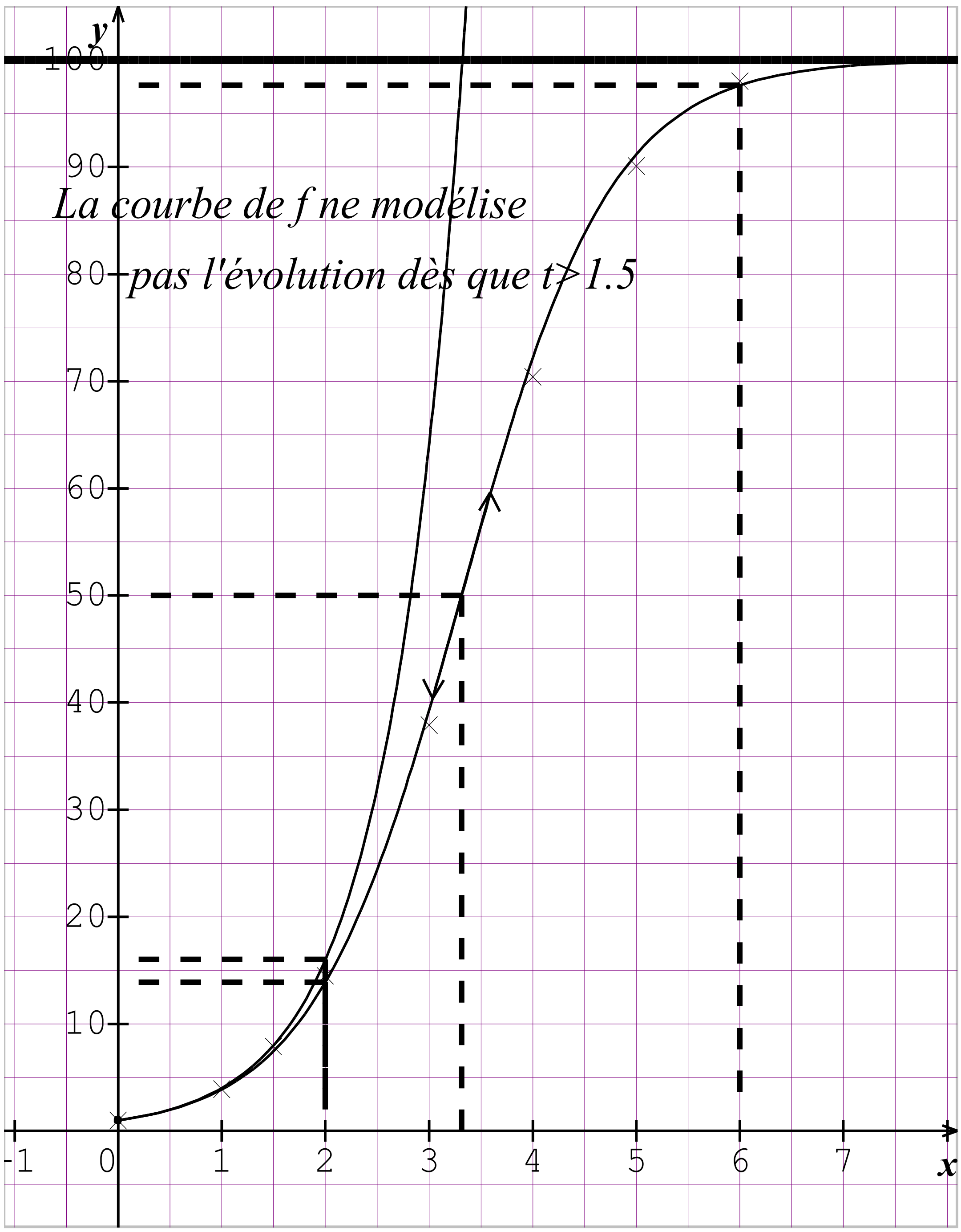
3) la droite d'équation $y=M=100$ est asymptote à Γ

Le point d'abscisse t_0 de Γ est le point de Γ d'ordonnée $\frac{M}{2}=50$

Le coefficient directeur de la tangente en ce point vaut $g'(t_0)=a\,g(t_0)(1-\frac{g(t_0)}{M})=\frac{\ln 4\times 50}{2}=50\ln 2$

$t_0=\frac{\ln C}{a}=\frac{\ln 99}{\ln 4}\approx 3{,}31$ à 10^{-2} près.

4) Le premier modèle étudié dans la partie *A* (modélisé par la fonction *f*) n'est valable que pour des faibles valeurs de *t* ($0\le t\le 1$)



y
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
x
La courbe de f ne modélise
pas l'évolution dès que t>1.5