Exercice 1 (France septembre 2004)

1) g définie sur $]1\,;+\infty[$ par: $g(x)=\dfrac{1}{x(x^2-1)}$

a) Pour tout $x>1$, $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{x-1}=\dfrac{a(x^2-1)+bx(x-1)+cx(x+1)}{x(x^2-1)}=\dfrac{(a+b+c)x^2+(-b+c)x-a}{x(x^2-1)}$

On en déduit successivement par identification des coefficients: $a+b+c=0$, $-b+c=0$ et $a=-1$

$b+c=1$ et $c=b$ donnent $b=c=\dfrac{1}{2}$

$g(x)=\dfrac{-1}{x}+\dfrac{1}{2(x+1)}+\dfrac{1}{2(x-1)}$

b) Comme $x>0$, $x-1>0$ et $x+1>0$ sur $]1\,;+\infty[$, une primitive G de g sur $]1\,;+\infty[$ est par conséquent:

$G : x \mapsto -\ln x+\dfrac{1}{2}\ln(x+1)+\dfrac{1}{2}\ln(x-1)$

Remarques: *Autre écriture possible de* $G(x)$

$G(x)=\ln\dfrac{1}{x}+\ln\sqrt{x+1}+\ln\sqrt{x-1}=\ln\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

Toute primitive H de g diffère de G d'une constante: On a: $H(x)=G(x)+k$

Comme tout réel k est l'image par la fonction ln d'un réel C strictement positif, on obtient:
$H(x)=G(x)+\ln C=\ln C\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

2) Soit f la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2\text{x}}{(x^2-1)^2}$

f, étant de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x)=x^2-1$ admet pour primitive $\dfrac{-1}{u.}$

Une primitive de f sur $]1\,;+\infty[$ est $F(x)=\dfrac{-1}{x^2-1}$

3) $I=\displaystyle\int_2^3 \frac{2x}{(x^2-1)}\cdot\ln x\,dx$

Posons: $u(x)=\ln x$ et $v'(x)=f(x)$, on en déduit: $u'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $v(x)=F(x)$

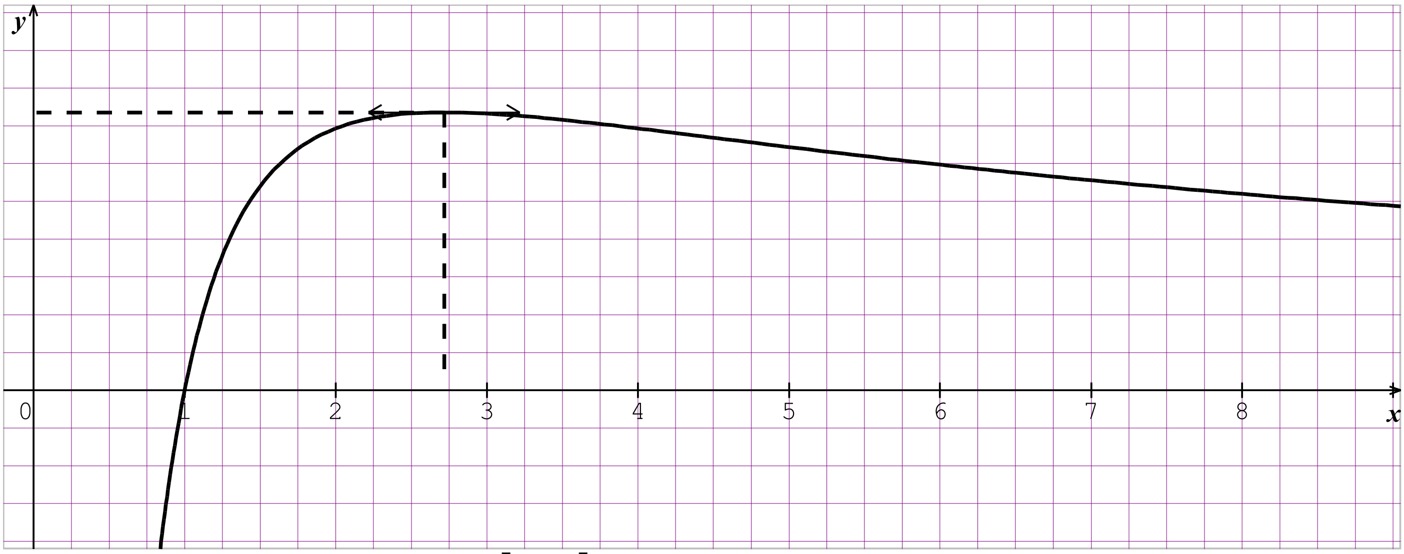
$I=\Big[F(x)\cdot\ln x\Big]_2^3-\displaystyle\int_2^3\frac{1}{x}F(x)dx=F(3)\ln 3-F(2)\ln 2+\int_2^3 g(x)dx=F(3)\ln 3-F(2)\ln 2+(G(3)-G(2))$

$F(3)=\dfrac{-1}{8}$, $F(2)=\dfrac{-1}{3}$, $G(3)=-\ln 3+\dfrac{1}{2}\ln 4+\dfrac{1}{2}\ln 2=-\ln 3+\dfrac{3}{2}\ln 2$,

$G(2)=-\ln 2+\dfrac{1}{2}\ln 3+\dfrac{1}{2}\ln 1=-\ln 2+\dfrac{1}{2}\ln 3$

Finalement: $I=\dfrac{-1}{8}\ln 3+\dfrac{1}{3}\ln 2-\ln 3+\dfrac{3}{2}\ln 2+\ln 2-\dfrac{1}{2}\ln 3=\dfrac{17}{6}\ln 2-\dfrac{13}{3}\ln 3$

Exercice 2 (France septembre 2004)
x et y sont deux éléments distincts de $]0;+\infty[$
Soit l'équation (E): $x^y=y^x$
1) La fonction ln étant une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$, on a: $x^y=y^x$ équivaut à $\ln x^y=\ln y^x$ équivaut à $y\ln x=x\ln y$.
Comme x et y sont non nuls, on obtient: (E) est équivalente à $\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{\ln y}{y}$
2) *h* est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}$
x_0 est l'abscisse du maximum de *h*
a) On sait: $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\dfrac{x}{x}=0$
On a: $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=+\infty$, car, $x>0$, d'où, $\lim\limits_{x\to 0}\ln\dfrac{x}{x}=-\infty$
b) $h'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-1\cdot\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$
La dérivée s'annule en changeant de signe lorsque $\ln x=1$. *h* admet un extremum en *e*.
Comme $1-lnx>0$ sur $]0;e[$ et $1-lnx<0$ sur $]e;+\infty[$, *h* atteint son maximum en *e*. $x_0=e$ et $h(x_0)=h(e)=\dfrac{1}{e}$
c) La représentation (C) de *h* coupe l'axe des abscisses lorsque $\ln x=0$. Le point d'intersection de (C) et (Ox) est le point $I(1;0)$
3) $\lambda\in\left]0;\dfrac{1}{e}\right[$
Sur $]1;e[$, *h* est continue, car, dérivable et strictement croissante.
h réalise donc une bijection de $]1;e[$ sur $]h(1);h(e)[=\left]0;\dfrac{1}{e}\right[$.
Par conséquent pour tout réel $\lambda\in\left]0;\dfrac{1}{e}\right[$, il existe un réel *a* unique de $]1;e[$ tel que $h(a)=\lambda$.
Sur $]e;+\infty[$, *h* est continue et strictement décroissante.
h réalise donc une bijection de $]e;+\infty[$ sur $\left]\lim\limits_{x\to 0} h(x);h(e)\right[=\left]0;\dfrac{1}{e}\right[$.
Par conséquent pour tout réel $\lambda\in\left]0;\dfrac{1}{e}\right[$, il existe un réel *b* unique de $]e;+\infty[$ tel que $h(b)=\lambda$.



4) La fonction s définie sur l'intervalle $\left]1\,;\frac{1}{e}\right[$ qui, à tout a associe le réel b de $]e\,;+\infty[$ tel que $h(a)=h(b)$

a) Lorsque a tend vers 1 par valeurs supérieures, s tend vers $+\infty$
b) Lorsque a tend vers e par valeurs inférieures, s tend vers e
c) s est une fonction strictement décroissante.

a	1	e
s	$+\infty$ ↘	e

5) Le seul entier de l'intervalle $\left]1\,;\frac{1}{e}\right[$ est 2. Comme $\frac{\ln 4}{4}=\frac{2\ln 2}{4}=\ln\frac{2}{2}$, les seuls couples d'entiers solutions solutions de (E) sont les couples $(2\,;4)$ et $(4\,;2)$

Exercice 3 (France septembre 2004)
Un gaz est constitué de deux sortes de particules: 75% de particules A et 25% de particules B.
Les particules sont projetées sur une cible formée de deux compartiments K_1 et K_2 .
Une particule au hasard de A entre dans K_1 avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et dans K_2 avec la probabilité $\frac{2}{3}$; une particule au hasard de B entre dans K_1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et dans K_2 avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
Voir arbre de probabilité
Partie A.
1) $A_1 = A \cap K_1$: la particule est de type A et entre dans K_1 : $P(A \cap K_1) = P(A) \times P_A(K_1) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$

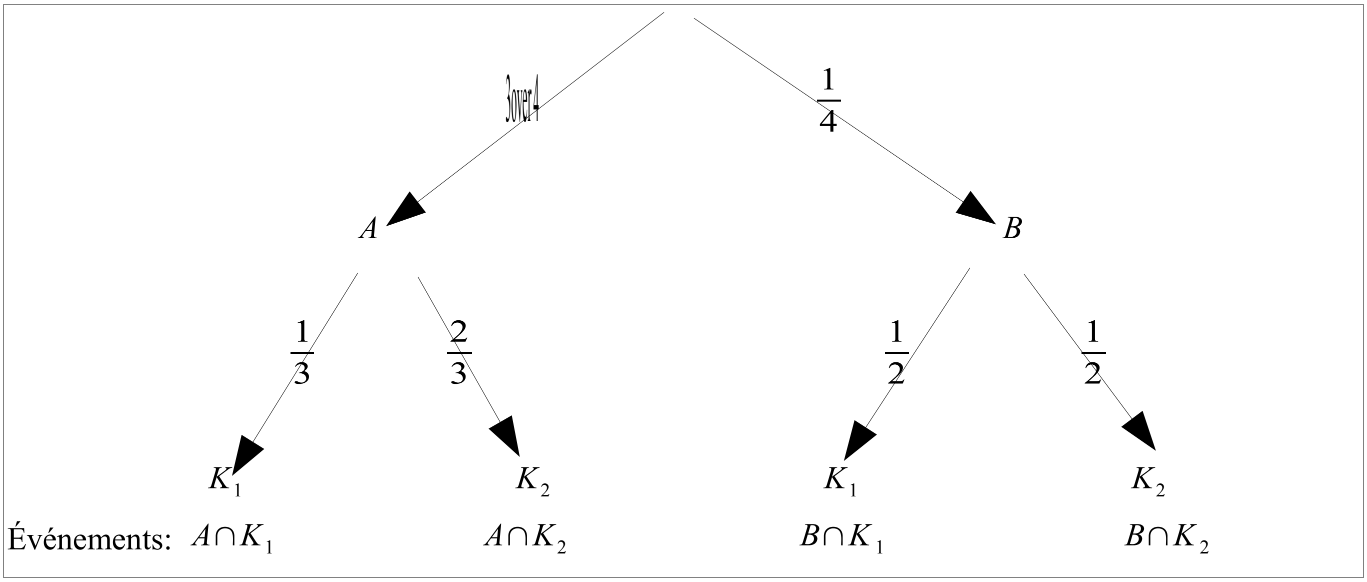
$A_2 = A \cap K_2$: la particule est de type A et entre dans K_2 : $P(A \cap K_2) = P(A) \times P_A(K_2) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$

$B_1 = B \cap K_1$: la particule est de type B et entre dans K_1 : $P(B \cap K_1) = P(B) \times P_B(K_1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

$B_2 = B \cap K_2$: la particule est de type B et entre dans K_2 : $P(B \cap K_2) = P(B) \times P_B(K_2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

A et B formant une partition de l'univers, on a, d'après la relation des probabilités totales, l'événement C_1 : "la particule entre dans K_1 : $P(C_1) = P(A \cap K_1) + P(B \cap K_1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ et C_2 : "la particule entre dans K_2 :

$P(C_2) = P(A \cap K_2) + P(B \cap K_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$



2) On procède 5 fois de suite à la même épreuve et le grand nombre de particules permet de considérer que les expériences sont indépendantes, d'où, la variable aléatoire X donnant le nombre de particules dans K_2 suit la loi binomiale de paramètres 5 et $\frac{5}{8}$

$$P(X=2) = \binom{5}{2} \left(\frac{5}{8}\right)^2 \left(\frac{3}{8}\right)^3 = \frac{10 \times 5^2 \times 3^3}{8^5} \approx 0{,}21 \text{ à } 10^{-2} \text{ près par excès.}$$

Partie B
Les particules A radioactives se transforment spontanément en particules B.
$p(t)$ est la proportion de particules A à l'instant avec $p(0) = 0{,}75$.

Plus généralement $p(t)=0{,}75\,e^{-\lambda t}$, où, $\lambda\in\mathbb{R}$.

1) La demi-vie (temps au bout duquel le nombre de particules restantes est la moitié du nombre initial) est égale à 5 730 ans d'où $p(5730)=\frac{1}{2}p(0)=\frac{1}{2}.0{,}75=0{,}75\,e^{-5\,730\lambda}$

On en déduit: $-5\,730\,\lambda=-\ln 2$ $\lambda=\frac{\ln 2}{5}730\approx 0{,}000\,12$ à 10^{-5} près par défaut.

2) Lorsque 10 % des particules A se sont transformées en particules B, la proportion de particules A est: $0{,}9\times 0{,}75=0{,}675$ (ou encore: $0{,}75-0{,}1\times 0{,}75$)

On cherche *t* tel que $p(t)=0{,}675$

$0{,}675=0{,}75\,e^{-\lambda t}$ avec $\lambda=\frac{\ln 2}{5}730$

On en déduit: $e^{-\lambda t}=\frac{675}{750}=0{,}9$

$\lambda t=-\ln 0{,}9$ donc $t=\frac{-\ln 0{,}9\times 5\,730}{\ln 2}\approx 871$ ans par excès.

3) Il y a autant de particules A que de particules B lorsque $p(t)=\frac{1}{2}$

$0{,}75\,e^{-\lambda t}=\frac{1}{2}$ équivaut à $e^{-\lambda t}=\frac{2}{3}$

$\lambda t=-\ln\frac{2}{3}$ On en déduit: $t=\frac{-\ln\frac{2}{3}\times 5\,730}{\ln 2}\approx 3\,352$ ans par excès.

Exercice 4 (France septembre 2004)
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. (Unité : 1 cm)
1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-8z\sqrt{3}+64=0$
$\Delta=(8\sqrt{3})^2-4\cdot 64=64(3-4)=-64=(8\text{i})^2$
L'équation a donc deux solutions complexes conjuguées $a=\frac{-(-8\sqrt{3})-8\text{i}}{2}=4\sqrt{3}-4\text{i}$ et $b=\frac{-(-8\sqrt{3})+8\text{i}}{2}=4\sqrt{3}+4\text{i}$
2) A et B sont les points d'abscisses respectives a et b.
a) $|a|=|b|=\sqrt{(4\,sqrt3)^2+4^2}=8$ et un argument θ de a vérifie $\cos\theta=\frac{4\sqrt{3}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta=\frac{-4}{8}=\frac{-1}{2}$.
$\theta=-\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$
Comme b est le conjugué de a, on a: $a=8e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $b=8e^{i\frac{\pi}{6}}$
b) $OA=OB=|a|=|b|=8$.
L'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $b-a=8\text{i}$, d'où, $AB|8\text{i}|=8$.
Le triangle OAB est un triangle équilatéral.
3) C est le point d'affixe $c=-\sqrt{3}+i$ et D son image par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$
L'affixe d de D est donc égale à $d=e^{-\frac{\pi}{3}}\cdot c=(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})(-\sqrt{3}+i)=2\text{i}$
4) G est le barycentre du système $(O\,;-1),(D\,;1),(B\,;1)$
a) Puisque $-1+1+1\neq 0$, G existe et l'affixe de G est $g=\frac{1}{-1+1+1}(-1\times 0+1\times b+1\times d)=b+d=4\sqrt{3}+6i$
b) L'affixe de $\overrightarrow{CD}$ est $d-c=\sqrt{3}+i$ et celle de $\overrightarrow{CG}$ est $g-c=5\sqrt{3}+5i=5(\sqrt{3}+i)$
5 étant un réel, on en déduit: $\overrightarrow{CG}=5\overrightarrow{CD}$
Les points C, D, G sont alignés (dans cet ordre)
d) L'affixe de $\overrightarrow{DG}$ est $g-d=4\sqrt{3}+4i=b$
On en déduit: $\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{OB}$
Le quadrilatère $OBGD$ est un parallélogramme.
5) $AG=|g-a|=|10\text{i}|=10$, $AC=|c-a|=|-5\sqrt{3}+5\text{i}|=\sqrt{75+25}=10$,
$GC=|g-c|=|5\sqrt{3}+5\text{i}|=\sqrt{75+25}=10$
Le triangle AGC est donc équilatéral.