# Index



### *Exercice 1*

**EXERCICE 1** **5 points**

**Partie A**

Restitution organisée de connaissances On supposera connus les résultats suivants :

- $e^0 = 1$.
- Pour tous réels $x$ et $y$, $e^x \times e^y = e^{x+y}$.

**1.** Démontrer que pour tout réel $x$, $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.

**2.** Démontrer que pour tout réel $x$ et pour tout entier naturel $n$, $(e^x)^n = e^{nx}$.

**Partie B**

On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx.$$

**1.** **a.** Montrer que $u_0 + u_1 = 1$.

**b.** Calculer $u_1$. En déduire $u_0$.

**2.** Montrer que pour tout entier naturel $n$, $u_n \geqslant 0$.

**3.** **a.** Montrer que pour tout entier naturel $n$ non nul, $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1-e^{-n}}{n}$.

**b.** En déduire que pour tout entier naturel $n$ non nul, $u_n \leqslant \dfrac{1-e^{-n}}{n}$.

**4.** Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

**Partie A**

1) On sait: pour tous réels $x$ et $y$ , $e^x \times e^y = e^{x+y}$,
en particulier, lorsque $y = -x$, on a: $e^x \times e^{-x} = e^{x-x} = e^0$.
Comme $e^0 = 1$, pour tout $x$ réel, $e^x \times e^{-x} = 1$.

Le produit $e^x \times e^{-x}$ étant non nul, aucun des facteurs n'est nul, d'où, $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

2) Démonstration par un récurrence:
Soit un réel $x$.
P(n): $(e^x)^n = e^{nx}$.
***Initialisation:*** Soit $n = 0$, $(e^x)^0 = 1$ car tout réel non nul à la puissance 0 vaut 1.
$e^{0\times x} = e^0 = 1$
La propriété est vraie en 0
***Hérédité:*** Supposons la propriété P($n$) vraie pour un entier $n$, on a alors: $(e^x)^n = e^{nx}$.
Évaluons $(e^x)^{n+1} = (e^x)^n \times e^x = e^{nx} \times e^x = e^{(nx+x)} = e^{(n+1)x}$
On a montré : P($n$) implique P($n + 1$)
***Conclusion:***
D'après l'axiome de récurrence, la proposition P($n$) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Parie B**

La suite $(u_n)$ est définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx$

1 a) $u_0 + u_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}\,dx + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = \int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx$ (linéarité de l'intégrale)

$u_0 + u_1 = \int_0^1 1\,dx = [x]_0^1 = 1$

b) Calcul de $u_1 = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx$

Soit $u(x) = 1 + e^{-x}$, $u$ est une fonction strictement dérivable sur $[0;1]$ et $u'(x) = -e^{-x}$, d'où,

une primitive de $x \mapsto \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ est $x \mapsto -\ln(1 + e^{-x})$.

$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = \left[-\ln(1+e^{-x})\right]_0^1 = -\ln(1 + e^{-1}) - (-\ln 2) = \ln \frac{2e}{1+e}$

$u_0 = 1 - u_1 = 1 - \ln \frac{2e}{1+e}$ (Remarque: $1 = \ln e$, d'où, $u_1 = \ln \frac{1+e}{2}$ )

2) Pour tout $x \in [0; 1]$, et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} > 0$,

et, la fonction $x \mapsto \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$ continue sur $(0; 1]$,

d'où, (positivité de l'intégrale), $\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx > 0$.

Conclusion:

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.

3 a) Soit $n$ un entier naturel non nul.

$u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}\,dx + \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx = \int_0^1 \frac{e^{-nx}(1+e^{-x})}{1+e^{-x}}\,dx$ (linéarité ... et factorisation ...)

$u_{n+1} + u_n = \int_0^1 e^{-nx}\,dx = \left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^1 = -\frac{e^{-n}}{n} - \left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1-e^{-n}}{n}$

b) Comme $u_{n+1} \geqslant 0$, il vient: (en ajoutant $u_n$ à chaque membre de l'inégalité), $u_{n+1} + u_n \geqslant u_n$, soit,

$\frac{1-e^{-n}}{n} \geqslant u_n$.

4) On obtient l'encadrement suivant: $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1-e^{-n}}{n}$, et, on sait:

$\lim\limits_{n\to+\infty} -n = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0$, d'où, (limites de fonctions composées), $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$

Par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+e^{-n} = 1$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Le théorème des gendarmes permet de conclure que la suite $(u_n)$ converge vers 0.

## *Exercice 2*

**EXERCICE 2** **4 points**

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

On note (D) la droite passant par les points A(1 ; −2 ; −1) et B(3 ; −5 ; −2).

**1.** Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est :

$$\begin{cases} x &= 1+2t \\ y &= -2-3t \\ z &= -1-t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

**2.** On note (D′) la droite ayant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x &= 2-k \\ y &= 1+2k \\ z &= k \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

Montrer que les droites (D) et (D′) ne sont pas coplanaires.

**3.** On considère le plan (P) d'équation $4x+y+5z+3=0$.

**a.** Montrer que le plan (P) contient la droite (D).

**b.** Montrer que le plan (P) et la droite (D′) se coupent en un point C dont on précisera les coordonnées.

**4.** On considère la droite (Δ) passant par le point C et de vecteur directeur $\vec{w}$ (1 ; 1 ; −1).

**a.** Montrer que les droites (Δ) et (D′) sont perpendiculaires.

**b.** Montrer que la droite (Δ) coupe perpendiculairement la droite (D) en un point E dont on précisera les coordonnées.

1) Un point $M(x; y; z) \in$ (D) si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires,

Un point $M(x; y; z) \in$ (D) si et seulement si, il existe un réel $t$ tel que, $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$ .

Or, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-1 \\ -5-(-2) \\ -2-(-1) \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \\ z+1 \end{pmatrix}$.

Un point $M(x; y; z) \in$ (D) si et seulement si $\begin{cases} x-1=2t \\ y+2=-3t \\ z+1=-t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-3t \\ z=-1-t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

2) Un vecteur directeur de $(D')$ est $\vec{u}'\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de $(D)$ est t $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ces vecteurs n'étant pas colinéaires, les droites $(D)$ et $(D')$ ne sont pas parallèles.

Elles sont soit sécantes, soit non coplanaires.

Résolvons le système $\begin{cases} 1+2t=2-k \\ -2-3t=1+2k \\ -1-t=k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2t=2-(-1-t) \\ -2-3t=1+2(-1-t) \\ -1-t=k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=3 \\ -1-t=k \end{cases}$

Le système n'ayant pas de solutions, les droites ne sont pas sécantes.

Conclusion: les droites ne sont pas coplanaires.

3) Soit le plan (P) d'équation $4x + y + 5z + 3 = 0$

a) Les coordonnées (1; –2; –1) du point $A$ vérifient: $4\times1 + (-2) + 5\times(-1) + 3 = 0$, et,

les coordonnées (3; –5; –2) du point $B$ vérifient: $4\times3 + (-5) + 5\times(-2) + 3 = 0$,

les points $A$ et $B$ sont par conséquent dans (P).

La droite ($D$) est incluse dans (P).

***Autre méthode:***

Soit $M$ un point de ($D$) , $4(1 + 2t) + (-2 - 3t) + 5(-1 - t) +3 = 4 + 8t - 2 - 3t - 5 - 5t + 3 = 0$

Tout point de ($D$) est donc un point de ($P$)

Conclusion: La droite ($D$) est incluse dans (P).

b) Un point appartient à (P) et à ($D'$) si et seulement si ses coordonnées sont solutions du système

$$\begin{cases} 4x+y+5z+3=0 \\ x=2-k \\ y=1+2k \\ z=k \end{cases} \text{ si et seulement si } \begin{cases} 4(2-k)+1+2k+5k+3=0 \\ x=2-k \\ y=1+2k \\ z=k \end{cases} \text{ si et seulement si } \begin{cases} k=-4 \\ x=6 \\ y=-7 \\ z=-4 \end{cases}$$

Le point $C$(6; –7; –4) est l'unique point commun à (P° et ($D'$).

4 a) Soit $\Delta$ la droite passant par $C$ et dirigée par $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

On sait qu' un vecteur directeur de ($D'$) est $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$

Comme $\vec{w}\cdot\overrightarrow{u'} = 1\times(-1) + 1\times2 + (-1)\times1 = 0$, les vecteurs directeurs sont orthogonaux, et, par conséquent, les droites $\Delta$ et ($D'$) sont perpendiculaires

b) Montrons que $\Delta$ et ($D$) sont perpendiculaires.

***Une méthode:***

Le point $E$ est défini par $\overrightarrow{CE} \perp \overrightarrow{AB}$ et $E \in (AB)$.

On a donc: $(x_E - 6)\times2 + (y_E + 7)\times(-3) + (z_E + 4)\times(-1) = 0$

soit: $2x_E - 3y_E - z_E = 37$.

Comme $E \in (AB)$, $\begin{cases} x_E=1+2t \\ y_E=-2-3t \\ z_E=-1-t \end{cases}$, d'où, $2(1 +2t) - 3(-2 - 3t) - (-1 - t) = 37$.

Il vient: $t = 2$, puis $E$(5; –8; –3)

***Autre méthode:***

Un vecteur directeur de ($D$) est t $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}$ et on a: $\vec{w}\cdot\overrightarrow{AB} = 2 - 3 + 1 = 0$.

les vecteurs directeurs de $\Delta$ et $D$ sont orthogonaux, et, par conséquent, les droites $\Delta$ et ($D$) sont perpendiculaires

Un système d'équations paramétrées représentant $\Delta$ est : $\begin{cases} x=6+t' \\ y=-7+t' \\ z=-4-t' \end{cases}$

Résolvons le système: $\begin{cases} 1+2t=6+t' \\ -2-3t=-7+t' \\ -1-t=-4-t' \end{cases}$

$\begin{cases} 1+2t=6+t' \\ -2-3t=-7+t' \\ -1-t=-4-t' \end{cases} \begin{pmatrix} L1 \\ L2 \\ L3 \end{pmatrix}$ En faisant L1 + L2 – L3, , on a: 0 = 3 + 3 $t'$.

On en déduit $t' = -1$, puis, $t = 2$.

Vérifions que le point de paramètre $t = 2$ de ($D$) et le point de paramètre $t' = -1$ de $\Delta$ sont confondus.

Si $t = 2$, $\begin{cases} x=5 \\ y=-8 \\ z=-3 \end{cases}$ et si $t' = -1$, $\begin{cases} x=5 \\ y=-8 \\ z=-3 \end{cases}$.

Les deux droites étant perpendiculaires sont sécantes au point $E(5; -8; -3)$

## *Exercice 3*

**EXERCICE 3** **5 points**

**Enseignement obligatoire**

*Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie.*

*Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même nonfructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

1. Une urne contient une boule blanche et deux boules noires. On effectue 10 tirages successifs d'une boule avec remise (on tire une boule au hasard, on note sa couleur, on la remet dans l'urne et on recommence).

   **Proposition 1 :** « La probabilité de tirer exactement 3 boules blanches est $3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^7$. »

2. Une variable aléatoire $X$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda (\lambda > 0)$.
   On rappelle que pour tout réel $a > 0$ : $p(X \leqslant a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t}\,dt$.

   **Proposition 2 :** « Le réel $a$ tel que $p(X > a) = p(X \leqslant a)$ est égal à $\frac{\ln 2}{\lambda}$. »

3. Soit le nombre complexe $z = 1 - i\sqrt{3}$.

   **Proposition 3 :** « Si l'entier naturel $n$ est un multiple de 3 alors $z^n$ est un réel. »

4. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, le point A d'affixe $a = 2 - i$ et le point B d'affixe $b = \frac{1+i}{2}a$.

   **Proposition 4 :** « Le triangle OAB est rectangle isocèle. »

5. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, à tout point $M$ du plan d'affixe $z$ non nulle on associe le point $M'$ d'affixe $z'$ telle que $z' = \frac{-10}{\overline{z}}$ où $\overline{z}$ désigne le nombre conjugué de $z$.

   **Proposition 5 :** « Il existe un point $M$ tel que O, $M$ et $M'$ ne sont pas alignés. »

1) FAUX

La probabilité de " tirer une boule blanche " est $\frac{1}{3}$.

Les tirages étant successifs avec remise et au hasard, la variable aléatoire $X$ donnant le nombre de boules blanches en dix tirages suit la loi binomiale $\mathscr{B}(10; \frac{1}{3})$, d'où, $P(X = 3) = \binom{10}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^7 = 120 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^7$

2) VRAI

Comme $P(X > a) = 1 - P(X \leqslant a)$,

l'égalité $P(X > a) = P(X \leqslant a) \Leftrightarrow P(X > a) = \frac{1}{2}$.

Or, $P(X > a) = 1 - \int_0^a \lambda e^{-\lambda t}\,dt = 1 - \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^a = 1 - (e^{-\lambda a} - (-1)) = e^{-\lambda a}$

$e^{-\lambda a} = \frac{1}{2}$ si et seulement si $-\lambda a = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$ si et seulement si $\lambda = \frac{\ln 2}{\lambda}$

3) VRAI

$z = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ est le nombre complexe de module $|z| = \sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2} = 2$ et

d'argument $\theta$ tel que $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, d'où, $\theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ; $k \in \mathbb{Z}$

$z^n$ est donc le nombre complexe de module $2^n$ et d'argument $n\theta = -\frac{n\pi}{3} + 2nk\pi$ ; $k \in \mathbb{Z}$

Si $n = 3m$ où $m \in \mathbb{N}$ ($n$ multiple de 3) un argument de $z^n$ est $-\pi$, d'où, $z^n$ est un réel.

Remarque: les écritures complexes de $z$ et $z^n$ sont $z = 2\,e^{\mathrm{i}\,-\pi/3}$ et de $z^n = 2^n\,e^{-\mathrm{i}\;n\pi/3}$.

Si $n$ est un multiple de 3 alors $n = 3m$ et $z^n = 2^{3m}\,e^{-\mathrm{i}\,m\pi} = 2^{3m}\,(e^{-\mathrm{i}\pi})^m = (-1)^m 2^{3m}$.

4) VRAI

$A$ est le point d'affixe $a = 2 - \mathrm{i}$, d'où, $OA = |a| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

$B$ est le point d'affixe $b = \frac{1+\mathrm{i}}{2}a$, d'où, $OB = \frac{\sqrt{2}}{2}\,|a| = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

L'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $b - a = (\frac{1+\mathrm{i}}{2} - 1)a = \frac{-1+\mathrm{i}}{2}a$, d'où, $AB = |b-a| = \frac{\sqrt{2}}{2}\,|a| = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

Comme $AB = OB$ et que $OA^2 = OB^2 + AB^2$, le triangle $OAB$ est isocèle et rectangle en $B$.

***Autre méthode:***

Montrons que $A$ est l'image de $O$ dans la rotation de centre $B$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire:

montrons que $z_A - z_B = \mathrm{i}(z_O - z_B)$

$\mathrm{i}(-b) = -\mathrm{i}\,\frac{1+\mathrm{i}}{2}\,a = \frac{1-\mathrm{i}}{2}\,a$ et $a - b = a(1 - \frac{1+\mathrm{i}}{2}) = \frac{1-\mathrm{i}}{2}\,a$.

5) FAUX.

Pour tout point $M$ distinct de $O$, une mesure de $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ est $\arg\left(\frac{z'}{z}\right)$.

Or, $\frac{z'}{z} = \frac{-10}{z.\bar{z}}$ Comme $z\bar{z} = (|z|)^2$ est un réel strictement positif, un argument de $\frac{z'}{z}$ est un argument d'un réel strictement négatif.

une mesure de $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \pi + 2k\pi$ ; $k \in \mathbb{Z}$

Les points $O$, $M$ et $M'$ sont alignés.

# Exercice 4

**EXERCICE 4** **6 points**

**Partie A**

Soit $u$ la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$u(x) = x^2 - 2 + \ln x.$$

1. Étudier les variations de $u$ sur $]0\,;\,+\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.
2. a. Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0\,;\,+\infty[$. On note $\alpha$ cette solution.
   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude $10^{-2}$ de $\alpha$.
3. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de $x$.
4. Montrer l'égalité : $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$.

**Partie B**

On considère la fonction $f$ définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2.$$

On note $f'$ la fonction dérivée de $f$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

1. Exprimer, pour tout $x$ de $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$.
2. En déduire les variations de $f$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

**Partie C**

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on note :

- $\Gamma$ la courbe représentative de la fonction ln (logarithme népérien) ;
- A le point de coordonnées (0 ; 2) ;
- $M$ le point de $\Gamma$ d'abscisse $x$ appartenant à $]0\,;\,+\infty[$.

1. Montrer que la distance A$M$ est donnée par A$M = \sqrt{f(x)}$.
2. Soit $g$ la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{f(x}$.
   a. Montrer que les fonctions $f$ et $g$ ont les mêmes variations sur $]0\,;\,+\infty[$.
   b. Montrer que la distance A$M$ est minimale en un point de $\Gamma$, noté P, dont on précisera les coordonnées.
   c. Montrer que $\text{AP} = \alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.
3. *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   La droite (AP) est-elle perpendiculaire à la tangente à $\Gamma$ en P ?

## Partie A

Sur $]0; +\infty[$, $u(x) = x^2 - 2 + \ln x$.

1) $u$, étant la somme de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$, est dérivable sur $]0; +\infty[$, et,

pour tout $x > 0$, $u'(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$.

Comme $x > 0$ et $\dfrac{1}{x} > 0$, $u'(x) > 0$.

Par conséquent: $u$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, par somme, on a: $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = -\infty$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$.

2) $u$ est continue sur $]0; +\infty[$.

$u$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
$0 \in ]-\infty; +\infty[$ (intervalle image).
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (ou théorème de la bijection), l'équation $u(x) = 0$ admet une et une seule solution $\alpha$ sur $]0; +\infty[$.
Le tableur de la calculatrice donne: $u(1{,}31) \approx -0{,}0139$ et $u(1{,}32) \approx 0{,}02003$
On a donc: $u(1{,}31) < u(\alpha) < u(1{,}32)$ et comme $u$ est strictement croissante, on obtient:
$1{,}31 < \alpha < 1{,}32$ encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-2}$
3) $u$ strictement croissante et $u(\alpha) = 0$, d'où,
$u(x) < 0$ sur $]0; \alpha[$
$u(\alpha) = 0$
$u(x) > 0$ sur $]\alpha; +\infty[$.
4) $u(\alpha) = 0$ si et seulement si $\alpha^2 - 2 + \ln \alpha = 0$ si et seulement si $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$

**Partie B**
$f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$ définie sur $]0; +\infty[$.
1) $f$ est la somme de deux fonctions $x \mapsto x^2$ et la fonction $x \mapsto (2 - \ln x)^2$ est de la forme $v^2$

avec $v(x) = 2 - \ln x$ qui a pour dérivée $2v'v$
f est donc dérivable (somme de fonctions dérivables) , et,
pour tout $x > 0$, $f'(x) = 2x + 2\times(-\dfrac{1}{x})\times(2 - \ln x) = \dfrac{2x^2-4+2\ln x}{x} = \dfrac{2u(x)}{x}$.
2) Comme $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $u(x)$ déterminé à la partie A/3.
Par conséquent: $f$ est strictement décroissante sur $]0; \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha; +\infty[$.
**Partie C.**
Dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on a: $M(x, \ln x)$ avec $x > 0$ et $A(0; 2)$.
1) $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x \\ \ln x - 2 \end{pmatrix}$, d'où, $AM^2 = x^2 + (\ln x - 2)^2 = x^2 + (2 - \ln x)^2$ car, $2 - \ln x$ et $\ln x - 2$ sont opposés.
$AM^2 = x^2 + (2 - \ln x)^2 = f(x)$, d'où, $AM = \sqrt{f(x)}$
2) On pose $g(x) = \sqrt{f(x)}$
a) $g$ est la composée de $f$ suivie de la fonction racine carré qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, d'où, la fonction composée $\sqrt{f}$ a les mêmes variations que $f$.
Ou encore:

Pour $f$ dérivable et non nulle, la fonction $g = \sqrt{f}$ est dérivable et a pour dérivée $g' = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$

et comme $2\sqrt{f} > 0$, $g'$ et $f'$ ont le même signe.
b) Comme $f$ atteint son minimum en $\alpha$, $g$ atteint son minimum en $\alpha$, d'où, la longueur $AM = g(x)$ est minimale au point $P(\alpha, \ln \alpha)$ et vaut $g(\alpha)$.
c) $AP = g(\alpha) = \sqrt{f(\alpha)} = \sqrt{\alpha^2 + (2 - \ln \alpha)^2}$
Or, on sait que $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$, d'où, $\alpha^2 + (2 - \ln \alpha)^2 = \alpha^2 + (\alpha^2)^2 = \alpha^2(1 + \alpha^2)$
Comme $\alpha > 0$, $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$.
Finalement: $AP = \alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.
3) Un vecteur directeur de la droite $(AP)$ est $\overrightarrow{AP} \begin{pmatrix} \alpha \\ \ln \alpha - 2 \end{pmatrix}$.

Le coefficient directeur de la tangente $T$ à $\Gamma$ en $P$ est $\dfrac{1}{\alpha}$ (nombre dérivé de ln en $\alpha$ abscisse de $P$).

Un vecteur directeur de la tangente $T$ est donc $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{\alpha}\end{pmatrix}$ (ou $\alpha\ \vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ 1\end{pmatrix}$ )

Le produit scalaire $\alpha\ \vec{u}\cdot\overrightarrow{AP} = \alpha^2 + (\ln \alpha - 2) = 0$ (voir Partie A)

La droite ($AP$) est perpendiculaire à $T$ tangente à $\Gamma$ en $P$.