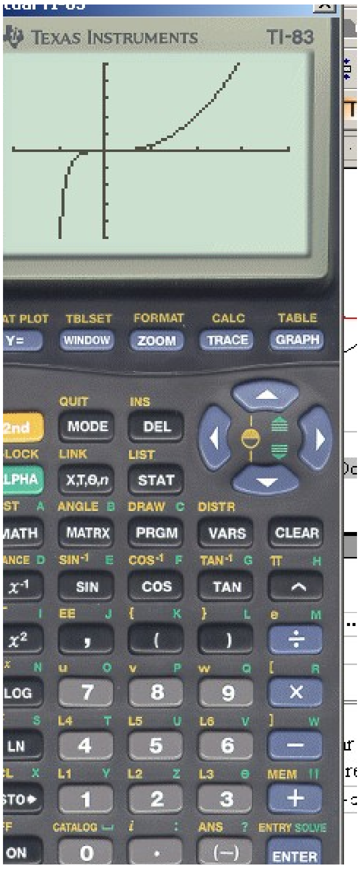
Exercice 3 (Nouvelle Calédonie mars 2005)
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$
Soit la fonction *f* définie sur $]-1 ;+\infty[$ par $f(x)=x^2-2{,}2x+2{,}2\ln(x+1)$
1) Calculatrice



2) **Il semble que**
a) f est croissante sur $]-1 ;+\infty[$
b) l'équation $f(x)=0$ a pour unique solution le réel 0
3) Étude de la fonction *f*

a) *f* est dérivable sur $]-1 ;+\infty[$ et $f'(x)=2\text{x}-2{,}2+\dfrac{2{,}2}{x+1}=\dfrac{2\text{x}^2-0{,}2x}{x+1}=\dfrac{2\text{x}(x-0{,}1)}{x+1}$

Sur $]-1 ;+\infty[$, $x+1>0$ et $f'(x)$ est donc strictement positif sur $]-1 ; 0[$ et sur $]0{,}1 ;+\infty[$, et strictement négatif sur $[0 ; 0{,}1]$. $f'(0)=0$ lorsque $x=0$ ou $x=0{,}1$
f est strictement croissante sur sur $]-1 ; 0]$ et sur $[0{,}1 ;+\infty[$ et strictement décroissante sur $[0 ; 0{,}1]$
b) En -1

$x>-1$ et $\lim\limits_{x\to-1}(x+1)=0$, d'où, $\lim\limits_{x\to-1}\ln(x+1)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-1}(x^2-2.2\text{x})=-1{,}1$

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=-\infty$

En $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-2.2\text{x})=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$, d'où, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x+1)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

Tableau de variations

x	-1		0		$0{,}1$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

$m=f(0{,}1)=\dfrac{-21}{100}+2{,}2\ln\dfrac{11}{10}$ La calculatrice donne $m\approx -3\times 10^{-4}$, donc, $m<0$

On a donc: $f(0)=0$. 0 est une solution de l'équation $f(x)=0$

Sur l'intervalle $]-1\,;0{,}1]$, l'équation n'a pas d'autre solution puisque le maximum de *f* est 0 atteint en 0

Sur l'intervalle $]0{,}1\,;+\infty[$, *f* est continue, strictement croissante, donc, *f* réalise une bijection de $]0{,}1\,;+\infty[$ sur $]m\,;+\infty[$.

Comme $m<0$, il existe une solution $\alpha\in]0{,}1\,;+\infty[$ à l'équation $f(x)=0$

L'équation $f(x)=0$ admet deux solutions 0 et α

4) a) En prenant $X_{min}=-0{,}1$, $X_{max}=0{,}2$, $Y_{min}=-0{,}0001$ et $Y_{max}=0{,}0001$, on visualise les solutions de l'équation $f(x)=0$

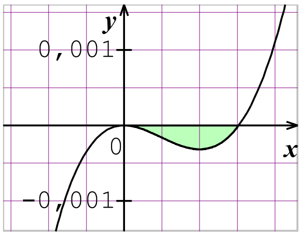
b) Le tableur de la calculatrice donne $\alpha\approx 0{,}15\ à\ 10^{-2}$ près par défaut.

5) *F* définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $F(x)=\dfrac{1}{3}x^3-1{,}1x^2-2{,}2x+2{,}2(x+1)\ln(x+1)$

F est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ et $F'(x)=x^2-2{,}2x-2{,}2+2{,}2\left[1.\ln(x+1)+(x+1)\times\dfrac{1}{x+1}\right]=f(x)$

Donc, F est une primitive de f sur $]-1;+\infty[$.

b) $\int_0^{\alpha} f(x)\,dx$ est **l'opposé** de l'aire en unité d'aire de la partie du plan située sous l'axe des abscisses et au-dessus de la courbe;



c) $\int_0^{\alpha} f(x)\,dx=[F(x)]_0^{\alpha}=F(\alpha)-F(0)$

$F(0)=0$ et $F(\alpha)=\frac{1}{3}\alpha^3-1{,}1\alpha^2-2{,}2\alpha+2{,}2(\alpha+1)\ln(\alpha+1)$,or, α est défini par $f(\alpha)=0$, d'où, α vérifie l'égalité $2{,}2\ln(\alpha+1)=-\alpha^2+2{,}2\alpha$

On en déduit: $F(\alpha)=\frac{1}{3}\alpha^3-1{,}1\alpha^2-2{,}2\alpha+(\alpha+1)(-\alpha^2+2{,}2\alpha)=\frac{-2}{3}\alpha^3+0{,}1\alpha^2$

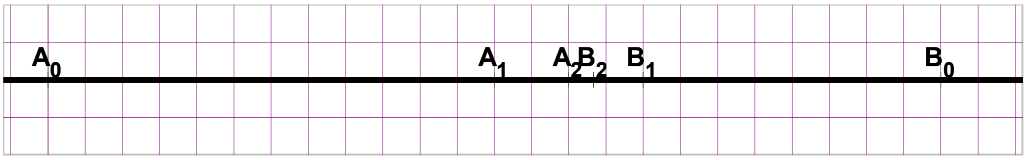
Exercice 4 (Nouvelle Calédonie mars 2005)

Partie A

A_0 et B_0 sont deux points distincts. A_1 est le milieu de $[A_0B_0]$ et B_1 le barycentre de $\{(A_0,1);(B_0,2)\}$

Pour tout entier naturel *n*, A_{n+1} est le milieu de $[A_nB_n]$ et B_{n+1} le barycentre de $\{(A_n,1);(B_n,2)\}$

1)



Lorsque *n* devient très grand A_n et B_n tendent vers un même point *L*

2) La droite (A_0B_0) étant muni du repère $(A_0,\vec{i})$ avec $\vec{i}=\frac{1}{12}\overrightarrow{A_0B_0}$, on note u_n et v_n les abscisses respectives des points A_n et B_n .

Comme A_{n+1} est le milieu de $[A_nB_n]$, on a: $u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$

Comme B_{n+1} est le barycentre de $\{(A_n,1);(B_n,2)\}$, on a: $\overrightarrow{A_0A_n}+2\overrightarrow{A_0B_n}=(1+2)\overrightarrow{A_0B_{n+1}}$

On en déduit: $v_{n+1}=\frac{u_n+2v_n}{3}$

Partie B

On a donc les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0=0$, $v_0=12$, $u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1}=\frac{u_n+2v_n}{3}$

1) La suite (w_n) définie par $w_n=v_n-u_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$ et de premier terme $w_0=12$,

car, $w_{n+1}=v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{2u_n+4v_n-3u_n-3v_n}{6}=\frac{w_n}{6}$

Comme $0<\frac{1}{6}<1$, la suite (w_n) est convergente vers 0, et, w_0 étant strictement positif, (w_n) est une suite ayant tous ses termes strictement positifs.

On a: $w_n=12\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n$ pour tout entier naturel *n*.

2) $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+v_n}{2}-u_n=\frac{v_n-u_n}{2}=\frac{w_n}{2}$. Comme $w_n>0$, la suite (u_n) est strictement croissante.

$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+2\mathrm{v}_n}{3}-v_n=\frac{u_n-v_n}{3}=-\frac{w_n}{3}$. Comme $w_n>0$, la suite (v_n) est strictement décroissante.

3) (u_n) étant croissante, (v_n) étant décroissante et (v_n-u_n) convergeant vers 0, les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Elles convergent par conséquent vers un même réel *l*.

4) Soit (t_n) définie par $t_n=2\mathrm{u}_n+3\mathrm{v}_n$

Pour tout entier naturel *n*, $t_{n+1}=2\mathrm{u}_{n+1}+3\mathrm{v}_{n+1}=u_n+v_n+u_n+2\mathrm{v}_n=2\mathrm{u}_n+3\mathrm{v}_n=t_n$

La suite (t_n) est donc une suite constante (ou stationnaire). Comme $t_0=36$, pour tout entier naturel *n*, $t_n=36$

Partie C.

Puisque (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite *l*, on a:

$\lim_{n\to+\infty} t_n=\lim_{n\to+\infty}(2\mathrm{u}_n+3\mathrm{v}_n)=\lim_{n\to+\infty} 2\mathrm{u}_n+\lim_{n\to+\infty} 3\mathrm{v}_n=2\mathrm{l}+3\mathrm{l}=5\mathrm{l}$

Or, $\lim_{n\to+\infty} t_n=36$, on en déduit: $l=\frac{36}{5}=7{,}2$.

Les points A_n et B_n tendent vers le point *L* d'abscisse 7,2 sur l'axe $(A_{0,}\vec{i})$