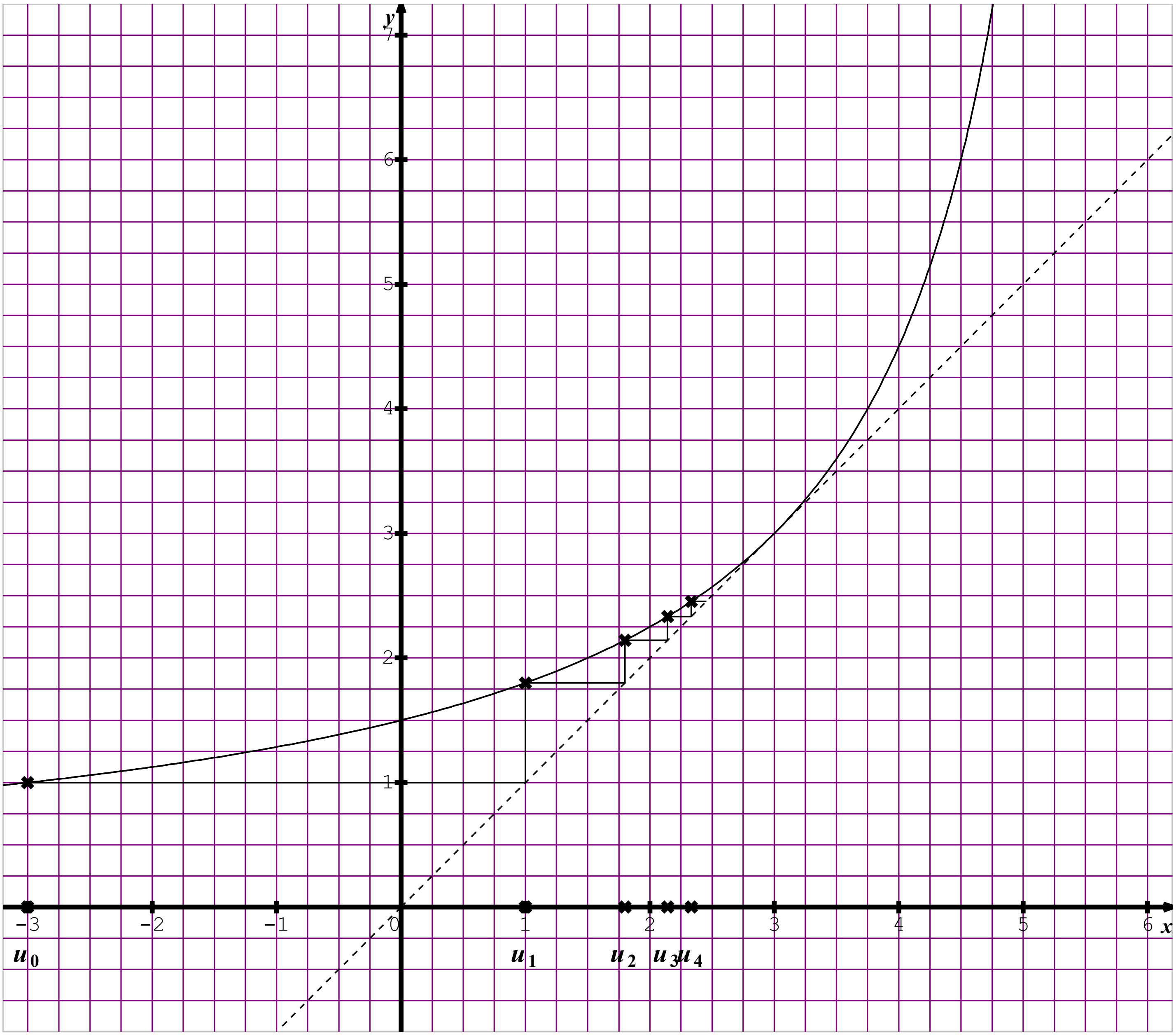
Table des matières

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $]-\infty; 6[$ par $f(x) = \dfrac{9}{6-x}$

On définit pour tout entier naturel n la suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$



1. La courbe représentative de la fonction f est donnée sur la feuille jointe accompagnée de celle de la droite d'équation $y = x$.

Construire, sur cette feuille annexe les points M_0 (u_0; 0) , M_1 (u_1; 0) , M_2 (u_2; 0) , M_3 (u_3; 0) et M_4 (u_4; 0).

Quelles conjectures peut-on formuler en ce qui concerne le sens de variation et la convergence éventuelle de la suite (u_n) ?

Il semble que la suite (u_n) est strictement croissante et converge vers le réel 3.

2. a. Démontrer que si $x < 3$ a alors $\frac{9}{6-x} < 3$

$x < 3 \Rightarrow -x > -3 \Rightarrow 6 - x > 3$
or, la fonction inverse est strictement décroissante sur]0; +∞[, d'où,
$6 - x > 3 \Rightarrow \frac{1}{6-x} < \frac{1}{3}$, et, comme 9 > 0, en multipliant les deux membres par 9, il vient: $\frac{9}{6-x} < 3$
En déduire que $u_n < 3$ pour tout entier naturel n.

Raisonnement par récurrence.

Initialisation:

$u_0 < 3$ est vraie car $u_0 = -3$
Hérédité:
On suppose qu'il existe **un** entier n tel que $u_n < 3$
En appliquant f, il découle du résultat précédent: $u_{n+1} < 3$
Conclusion:
la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

Montrons que (u_n) est strictement croissante.

Raisonnement par récurrence.

Initialisation:

$u_0 = -3$ et $u_1 = \frac{9}{9} = 1$, donc, $u_0 < u_1$
Hérédité:
On suppose qu'il existe **un** entier n tel que $u_n < u_{n+1}$
or, f est une fonction strictement croissante sur]–∞; 6[, comme composée de deux fonctions strictement décroissantes ($x \mapsto 6 - x$ strictement décroissante sur]–∞; 6[à **valeurs dans]0; +∞[,**

suivie de $x \mapsto \frac{9}{x}$ strictement décroissante sur]0; +∞[)
On a alors: si $u_n < u_{n+1}$ alors $f(u_n) < f(u_{n+1})$, soit $u_{n+1} < u_{n+2}$
Conclusion:
la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. Que peut-on déduire des questions 2. a. et 2. b. ?

Une suite croissante et majorée est convergente, donc, (u_n) converge vers un réel l.

3. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$ pour tout entier naturel n.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}-3} - \frac{1}{u_n-3}$$

Or, $u_{n+1} - 3 = \dfrac{9}{6-u_n} - 3 = \dfrac{9-18+3u_n}{6-u_n} = \dfrac{3(u_n-3)}{6-u_n}$, d'où, $\dfrac{1}{u_{n+1}-3} = \dfrac{6-u_n}{3(u_n-3)}$

Finalement: $v_{n+1} - v_n = \dfrac{6-u_n}{3(u_n-3)} - \dfrac{1}{u_n-3} = \dfrac{6-u_n-3}{3(u_n-3)} = \dfrac{3-u_n}{3(u_n-3)} = -\dfrac{1}{3}$

b. Déterminer v_n puis u_n en fonction de n.

On a alors: pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n = v_0 + \left(-\dfrac{1}{3}\right)n = -\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{3}n = -\dfrac{1+2n}{6}$

c. Calculer la limite de la suite (u_n).

Or, comme $v_n = \dfrac{1}{u_n-3}$, $u_n - 3 = \dfrac{1}{v_n}$

La limite de la suite (v_n) étant $-\infty$, son inverse converge vers 0 et finalement: $u_n - 3$ tend vers 0.

Conclusion: la suite (u_n) converge vers 3

Remarque: on peut calculer la limite l de (u_n) sans l'intermédiaire de la suite (v_n). En effet d'après le 2), l est la solution sur [-3;3] de $f(x) = x$.

La résolution de $\dfrac{9}{6-x} = x$ mène à $9 = 6x - x^2$ qui équivaut à $(x-3)^2 = 0$

EXERCICE 2 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A : Question de cours

Quelles sont les propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances ?

La congruence est compatible avec ces trois opérations:

c'est-à-dire: si $a \equiv a' \bmod(c)$ et $b \equiv b' \bmod(c)$

alors $a + b \equiv a' + b' \bmod(c)$

$a \times b \equiv a' \times b' \bmod(c)$

Pour $n\in\mathbb{N}$, $a^n \equiv a'^n \bmod(c)$

Démontrer la propriété de compatibilité avec la multiplication.

Données: $a \equiv a' \bmod(c)$ et $b \equiv b' \bmod(c)$

Il existe donc des entiers k et k' tels que $a = a' + kc$ et $b = b' + k'c$

Par produit membre-à-membre des deux égalités et factorisation de c dans le second membre, on obtient:

$ab = a'b' + c(kb' + ka' + kk'c)$
Comme $kb' + ka' + kk'c$ est un entier,

conclusion: $ab \equiv a'b' \bmod(c)$

PARTIE B

On note 0, 1, 2, . . . , 9, α, β, les chiffres de l'écriture d'un nombre en base 12.

Par exemple : $\overline{\beta\alpha 7}^{12} = \beta\times 12^2 + \alpha\times 12 + 7 = 11\times 12^2 + 10\times 12 + 7 = 1711$ en base 10

1. a. Soit N_1 le nombre s'écrivant en base 12 : $N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12}$

Déterminer l'écriture de N_1 en base 10.

$N_1 = \beta\times 12^2 + 1\times 12 + \alpha = 11\times 12^2 + 12 + 10 = 1\,606$ en base 10

b. Soit N_2 le nombre s'écrivant en base 10 : $N_2 = 1131 = 1\times 10^3 + 1\times 10^2 + 3\times 10 + 1$

Déterminer l'écriture de N_2 en base 12.

$1\,131 = 94\times 12 + 3 = (7\times 12 + 10)\times 12 + 3 = 7\times 12^2 + 10\times 12 + 3 = \overline{7\alpha 3}^{12}$

Dans toute la suite, un entier naturel N s'écrira de manière générale en base 12 : $N = \overline{a_n \ldots a_1 a_0}^{12}$

2. a. Démontrer que $N \equiv a_0$ (3). En déduire un critère de divisibilité par 3 d'un nombre écrit en base 12.

Comme $12 \equiv 0 \bmod(3)$, toutes les puissances de 12 sont congrues à 0 modulo 3

On a donc: $N = a_n 12^n + ... + a_1 12 + a_0 \equiv a_0 \bmod(3)$

Il faut et il suffit que le nombre N écrit en base 12 se termine par un multiple de 3, soit, 0; 3; 6; 9 pour être divisible par 3.

b. À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_2 est divisible par 3.

Confirmer avec son écriture en base 10.

N_2 écrit en base 12 se termine par 3, il est donc divisible par 3.

En base 10, on a: 1 + 1 + 3 + 1 = 6 qui est un multiple de 3 et par conséquent, cela confirme la divisibilité de N_2 par 3.

3. a. Démontrer que $N \equiv a_n + \cdots + a_1 + a_0$ (11). En déduire un critère de divisibilité par 11 d'un nombre écrit en base 12.

Il est évident que $12 \equiv 1 \bmod(11)$, d'où, toutes les puissances de 12 sont congrues à 1 modulo 11.

On a donc: $N = a_n 12^n + ... + a_1 12 + a_0 \equiv a_n + \cdots + a_1 + a_0 \quad (11)$

Il faut et il suffit que la somme des chiffres du nombre N en base 12 soit un multiple de 11 pour être divisible par 11.

b. À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_1 est divisible par 11.

Confirmer avec son écriture en base 10.

$N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12}$ est tel que $\beta + 1 + \alpha = 22$ en base 10, donc, N_1 est divisible par 11

Vérification en base 10: N_1 = 1 606 en base 10 et 1 606 = 11×146
Un critère de divisibilité par 11 en base 10 est: 1 + 0 = 1 et 6 + 6= 12 et comme 12 – 1 = 11, ...

4. Un nombre N s'écrit $\overline{x\,4\,y}^{12}$ . .Déterminer les valeurs de x et de y pour lesquelles N est divisible par 33.

3 et 11 étant des nombres premiers entre eux, N doit être divisible par 3 et par 11, d'où,

il faut et il suffit les 3 conditions suivantes:

x et y sont les chiffres 0, 1, 2, . . . , 9, α, β c'est-à-dire $0 \leqslant x \leqslant 11$ et $0 \leqslant y \leqslant 11$
y peut prendre les valeurs 0; 3; 6; 9
$x + 4 + y$ est un multiple de 11

Soit $y = 0$, alors, $x = 7$
Soit $y = 3$ alors $x = 4$
Soit $y = 6$ alors $x = 1$
Soit $y = 9$ alors $x = 9$
Les nombres N qui s'écrivent $\overline{x\,4\,y}^{12}$ et qui sont divisibles par 33 sont:
$\overline{740}^{12}$, $\overline{443}^{12}$, $\overline{146}^{12}$, $\overline{949}^{12}$
Remarques: on peut vérifier que les écritures en base 10 de ces nombres sont 1 056; 627; 198; 1 353
et qu'ils sont divisibles par 33.

EXERCICE 3 *5 points* *Commun à tous les candidats*

Deux éleveurs produisent une race de poissons d'ornement qui ne prennent leur couleur définitive qu'à l'âge de trois mois :

• pour les alevins du premier élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 10 % n'ont pas survécu, 75 % deviennent rouges et les 15 % restant deviennent gris.

• pour les alevins du deuxième élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 5 % n'ont pas survécu, 65 % deviennent rouges et les 30 % restant deviennent gris.

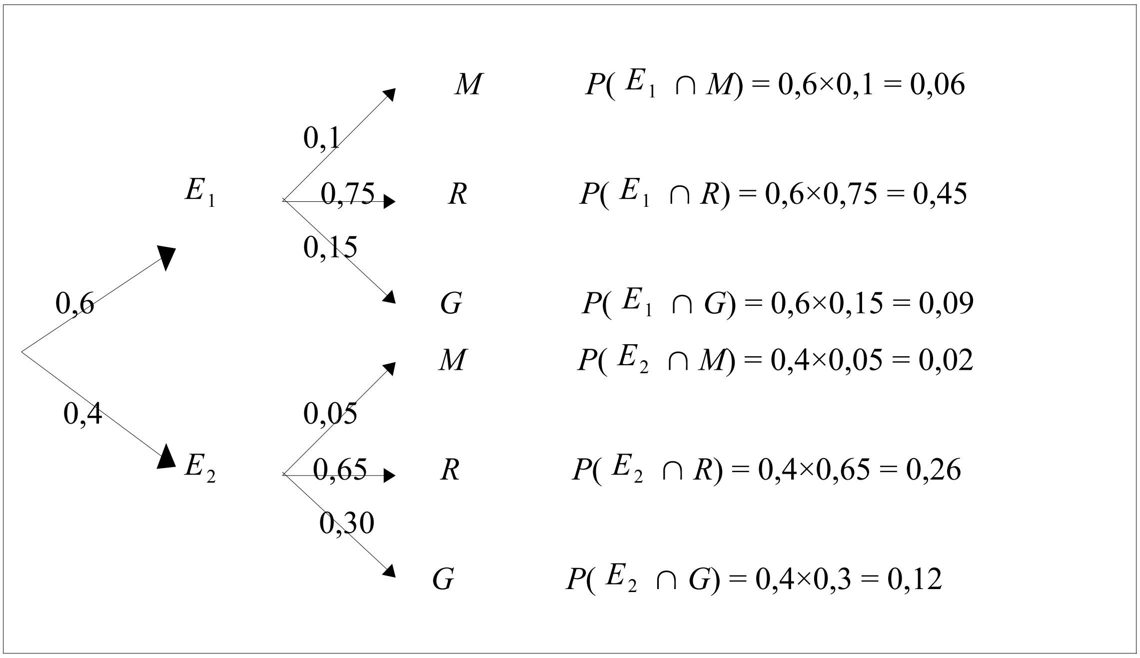
Une animalerie achète les alevins, à l'âge de deux mois : 60 % au premier éleveur, 40 % au second.

Notations: E_1 : "le poisson provient de l'élevage 1"

E_2 : "le poisson provient de l'élevage 2"

R : "le poisson est rouge", G : " le poisson est gris", M : "le poisson n'a pas survécu"

On peut résumer sous forme de tableaux ou d'arbre:



1. Un enfant achète un poisson le lendemain de son arrivée à l'animalerie, c'est-à-dire à l'âge de deux mois.

a. Montrer que la probabilité que le poisson soit toujours vivant un mois plus tard est de 0,92.

On cherche $P(\overline{M}) = 1 - P(M) = 1 - P(E_1 \cap M) - P(E_2 \cap M) = ... = 0{,}92$

ou encore

Le poisson provient de l'élevage 1 ou de l'élevage 2 (événements disjoints)

Il est rouge ou gris (événements disjoints)

$P(\overline{M}) = 0{,}6\times(0{,}45 + 0{,}15) + 0{,}4\times(0{,}65 + 0{,}30) = ... = 0{,}92$

b. Déterminer la probabilité qu'un mois plus tard le poisson soit rouge.

$P(R) = P(E_1 \cap R) + P(E_2 \cap R) = ... = 0{,}71$

c. Sachant que le poisson est gris à l'âge de trois mois, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier élevage ?

Le poisson est gris: $P(G) = P(\overline{M}) - P(R) = 0{,}21$

Le poisson est gris et provient de l'élevage 1: $P(E_1 \cap G) = 0{,}6\times 0{,}15 = 0{,}09$

On cherche $P_G(E_1) = \dfrac{P(E_1 \cap G)}{P(G)} = \dfrac{9}{21} = \dfrac{3}{7}$

2. Une personne choisit au hasard et de façon indépendante 5 alevins de deux mois. Quelle est la probabilité qu'un mois plus tard, seulement trois soient en vie ? On donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

La probabilité "être en vie" est égale à 0,92 (Probabilité du succès)

D'après la loi binomiale:

P(3 et 3 seulement en vie parmi 5) = $\binom{5}{3} 0{,}92^3 \times 0{,}08^2 = 10\times.... \approx 0{,}05$ à 10^{-2} par excès

3. L'animalerie décide de garder les alevins jusqu'à l'âge de trois mois, afin qu'ils soient vendus avec leur couleur définitive. Elle gagne 1 euro si le poisson est rouge, 0,25 euro s'il est gris et perd 0,10 euro s'il ne survit

pas.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique de l'animalerie par poisson acheté. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique, arrondie au centime.

X prend les valeurs –0,1 ; 0,25 et 1
$P(X = -0{,}1) = P(M) = 0{,}08$, $P(X = 0{,}25) = P(G) = 0{,}21$, $P(X = 1) = P(R) = 0{,}71$
$E(X) = -0{,}1\times0{,}08 + 0{,}25\times0{,}21 + 1\times0{,}71 \approx 0{,}75$ arrondi au centime par défaut

---

EXERCICE 4 ***5 points*** ***Commun à tous les candidats***

L'espace est rapporté à un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé. Soit t un nombre réel.

On donne le point $A(-1 ; 2 ; 3)$ et la droite D de système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 9 + 4t \\ y = 6 + t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

Le but de cet exercice est de calculer de deux façons différentes la distance d entre le point A et la droite D.

1. a. Donner une équation cartésienne du plan P , perpendiculaire à la droite D et passant par A.

D'après le système un vecteur directeur de D est $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}$.

Un point $M(x; y; z) \in P$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u} = 0$

On obtient: $(x + 1)\times4 + (y - 2)\times1 + (z - 3)\times2 = 0$

Une équation de (P) est: $4x + y + 2z - 4 = 0$

b. Vérifier que le point $B(-3 ; 3 ; -4)$ appartient à la droite D.

Le point B est le point de paramètre $t = -3$ (***Il est nécessaire de vérifier les 3 coordonnées)***

c. Calculer la distance d_B entre le point B et le plan P .

On sait (cours): $d_B = \dfrac{|4x_B + y_B + 2z_B - 4|}{\sqrt{4^2 + 1^2 + 2^2}} = ... = \sqrt{21}$

d. Exprimer la distance d en fonction de d_B et de la distance AB. En déduire la valeur exacte de d.

Faire un schéma. En notant I le point d'intersection de D et P, le triangle ABI est rectangle en I et on a:

$d^2 = AI^2 = AB^2 - IB^2 = AB^2 - d_B{}^2$

Or, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\-7\end{pmatrix}$, d'où, $AB^2 = ... = 54$ et $d^2 = 54 - 21 = 33$

$d = \sqrt{33}$

2. Soit M un point de la droite D. Exprimer AM^2 en fonction de t . Retrouver alors la valeur de d.

Soit $M \in d$, d'où, $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} 9+4t+1 \\ 6+t-2 \\ 2+2t-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10+4t \\ 4+t \\ -1+2t \end{pmatrix}$

$AM^2 = (10+4t)^2 + (4+t)^2 + (-1+2t)^2 = ... = 21 t^2 + 84t + 117$

La distance d est la valeur minimale de la distance AM.

Le minimum de AM est atteint quand AM^2 atteint son minimum, d'où,

on cherche la valeur de t pour laquelle l'expression $21 t^2 + 84t + 117$ est minimale

(Second degré). Le minimum est atteint lorsque $t = -2$

En remplaçant t par -2, on a: minimum de $AM^2 = ... = 33$

On retrouve $d = \sqrt{33}$

Compléments: on a ainsi les coordonnées du point I en remplaçant t par -2 dans le système $I(1; 4; -2)$

On peut aussi déterminer d'abord les coordonnées de I et le paramètre correspondant, puis, calculer AI en résolvant le système:

$$\begin{cases} 4x+y+2z-4=0 \\ x=9+4t \\ y=6+t \\ z=2+2t \end{cases}$$

qui mène à $4(9 + 4t) + 6 + t + 2(2 + 2t) - 4 = 0$, soit, $21t = -42$, d'où, $t = -2$

On en déduit $I(1; 4; -2)$, puis $\overrightarrow{AI} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ et donc $AI^2 = 4 + 4 + 25 = 33$