Nouvelle-Calédonie novembre 2004

Exercice 1 (Nouvelle-Calédonie novembre 2004)
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$. On considère l'application *f* du plan lui-même qui, à tout point $M(z)$, associe le point $M'(z')$ tel que $z'=z^2-4z$

1) $A(z_A)$ et $B(z_B)$ avec $z_A=1-i$ et $z_B=3+i$

a) $z_{A'}=(1-i)^2-4(1-i)=-2i-4+4i=-4+2i$

$z_{B'}=(3+i)^2-4(3+i)=9+6i-1-12-4i=-4+2i$

b) Soient z_1 et z_2 deux affixes de points M_1 et M_2 telles que ${z_1}^2-4z_1={z_2}^2-4z_2$

${z_1}^2-4z_1={z_2}^2-4z_2$ équivaut à ${z_1}^2-{z_2}^2-4z_1+4z_2=0$

${z_1}^2-4z_1={z_2}^2-4z_2$ équivaut à $(z_1-z_2)(z_1+z_2)-4(z_1-z_2)=0$

${z_1}^2-4z_1={z_2}^2-4z_2$ équivaut à $(z_1-z_2)(z_1+z_2-4)=0$

Ce produit est nul si et seulement si $z_1=z_2$ ou $z_1+z_2=4$

Soit *J* le point d'affixe 2, $\dfrac{z_1+z_2}{2}=2$

On obtient: ou bien M_1 et M_2 sont confondus ou bien le milieu de est le point fixe *J*

2) *I* est le point d'affixe -3

a) $OMIM'$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{M'I}$

$OMIM'$ est un parallélogramme si et seulement si $z=-3-z'$

$OMIM'$ est un parallélogramme si et seulement si $z^2-4z+3-z=0$

Conclusion: $OMIM'$ est un parallélogramme si et seulement si si et seulement si $z^2-3z+3=0$

b) Résolution de $z^2-3z+3=0$

$\Delta=(-3)^2-4\cdot1\cdot3=-3=(\sqrt{3}\,i)^2$

L'équation a deux solutions qui sont des complexes conjugués: $\alpha=\dfrac{3-\sqrt{3}\,i}{2}$ et $\bar{\alpha}=\dfrac{3+\sqrt{3}\,i}{2}$

3) a) $z'+4=z^2-4z+4=(z-2)^2$

On en déduit: $|z'+4|=|z-2|^2$ et $arg(z'-4)=2\,arg(z-2)+k\cdot2\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

b) $z_J=2$ et $z_K=-4$

Soit (C) le cercle de centre *J* et de rayon 2

$M\in(C)$ équivaut à $z-2=2e^{i\theta}$ $\qquad\theta\in\mathbb{R}$

On en déduit: $|z'+4|=4$ et $arg(z'+4)=2\theta$ $\qquad$ Comme $\theta\in\mathbb{R}$, $2\theta\in\mathbb{R}$

M' décrit le cercle (C') de centre *K* d'affixe $z_K=-4$ et de rayon 4

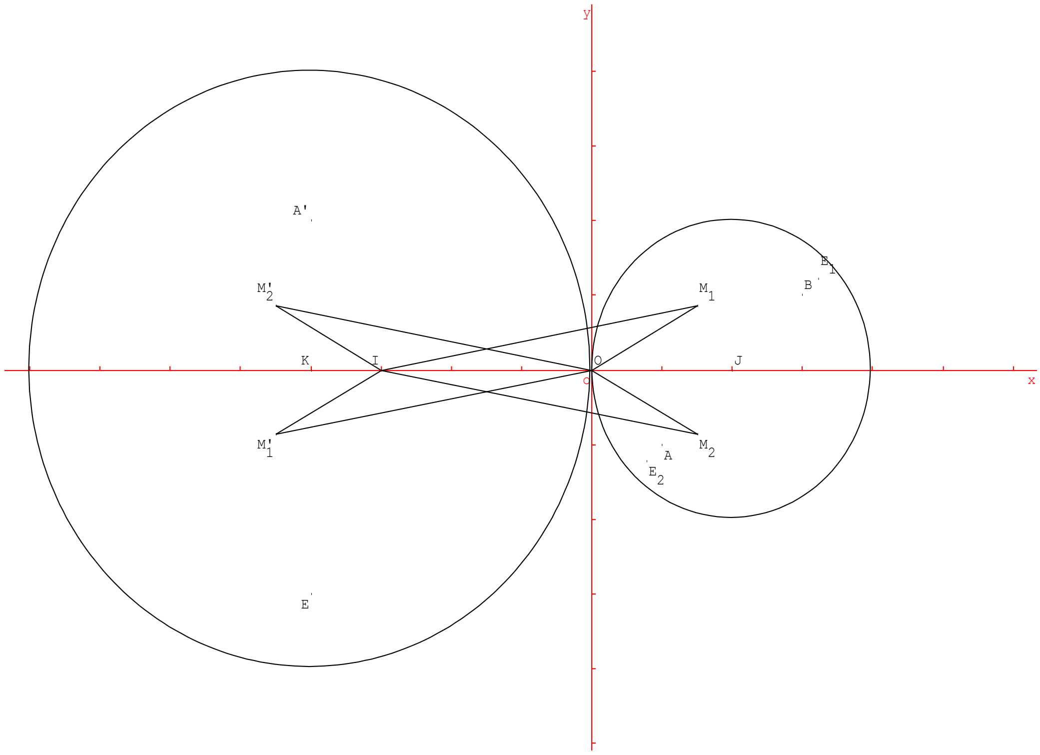
Remarque: quand *M* fait un tour du cercle (C) , M' fait deux tours du cercle (C')

c) *E* d'affixe $z_E=-3i=3(\cos\dfrac{-\pi}{2}+i\sin\dfrac{-\pi}{2})=3e^{i\frac{-\pi}{2}}$

D'après le 3 a), $z-2=\sqrt{3}\,e^{i\frac{-\pi}{4}}$ ou $z-2=-\sqrt{3}\,e^{i\frac{-\pi}{4}}=\sqrt{3}\,e^{i3\frac{\pi}{4}}$

Les points E_1 et E_2 d'affixes respectives $z_{E_1}=2+\sqrt{3}\,e^{i\frac{-\pi}{4}}=2+\sqrt{3}(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2})=\dfrac{4+\sqrt{6}}{2}-i\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

et $z_{E_2}=2-\sqrt{3}\,e^{i\frac{-\pi}{4}}=2-\sqrt{3}(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2})=\dfrac{4-\sqrt{6}}{2}+i\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ ont pour image le point *E*.



y
x
O
A'
M'2
M'1
K
I
E
M1
M2
J
B
E1
A
E2

Exercice 2 (Nouvelle-Calédonie novembre 2004)
ABCDEFGH cube de côté 1
repère orthonormal $(A;\vec{AB},\vec{AD},\vec{AE})$
I milieu de $[EF]$, *J* milieu de $[FG]$, *L* barycentre de $\{(A,1);(B,3)\}$
Soit (π) le plan d'équation $4x-4y+3z-3=0$
Travail préliminaire:
Coordonnées de $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;0;1)$, $F(1;0;1)$, $G(1;1;1)$, $H(0;1;1)$
$I(\frac{1}{2};0;1)$, $J(1;\frac{1}{2};1)$

1) ***Réponse b)*** $L(\frac{3}{4};0;0)$, car, *L* barycentre de $\{(A,1);(B,3)\}$ équivaut à $\vec{AL}=\frac{3}{4}\vec{AB}$

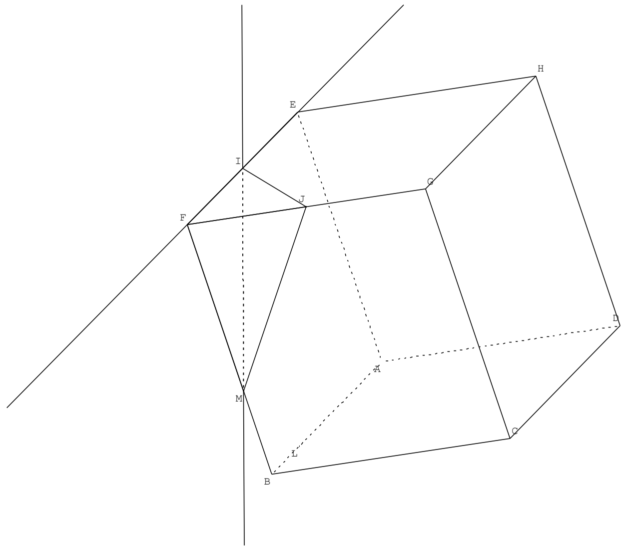
2) ***Réponse a)*** Les coordonnées de *G*, de *L* et de *E* vérifient l'équation de (π)
Les coordonnées de *J* et de *A* ne vérifient pas l'équation de (π).

3) ***réponse c)***.
Le plan (π') parallèle à (π) et passant par *I* a pour équation: $4x-4y+3z+d=0$
Comme $I\in(\pi')$, on a: $2+0+3+d=0$, d'où, $d=-5$
Une équation de (π') est: $4x-4y+3z-5=0$
La droite (EF) a pour système d'équations cartésiennes $\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$
En remplaçant dans l'équation de (π') *x* par 1 et *y* par 0, on obtient $M(1;0;\frac{1}{3})$

4) ***réponse a) et réponse b)***
(EL) est dirigée par $\vec{EL}(\frac{3}{4};0;-1)$
Un système d'équations paramétriques de (EL) est: $\begin{cases}x=\frac{3}{4}\alpha\\y=0\\z=1-\alpha\end{cases}$
Le point N a donc pour coordonnées $N(1;0;1-\frac{4}{3})$, $N(1;0;-\frac{1}{3})$

(IM) est dirigée par $\vec{IM}=(\frac{1}{2};0;-\frac{2}{3})$.
Comme $\frac{3}{2}\vec{IM}=\vec{EL}$, les droites (EL) et *(IM)* sont parallèles.

5) ***réponse a)***. comme (FI), (FJ) sont perpendiculaires, l'aire du triangle *FIJ* est $S=\frac{FI\times FJ}{2}=\frac{1}{8}$
Comme (FM) est perpendiculaire au plan (FIJ), le volume du tétraèdre est : $\frac{S\times FM}{3}=\frac{1\times2}{8\times3\times3}=\frac{1}{36}$


H
E
I
G
J
F
D
A
M
C
L
B

Exercice 3 (Nouvelle-Calédonie novembre 2004)

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x}{e^x-x}$

on note (C) la courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité: 2 cm en abscisse et 5 cm en ordonnées)

Partie A

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^x-x-1$

1) *g* est la somme de la fonction exponentielle et de la fonction affine $x\mapsto -x-1$ dérivables sur $\mathbb{R}$, donc, *g* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout *x* réel, $g'(x)=e^x-1$

Si $x>0$, $e^x>1$ et $g'(x)>0$. Si $x<0$, $e^x<1$ et $g'(x)<0$. $g'(0)=0$

g est donc strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$

g admet donc un minimum en 0 qui vaut $g(0)=0$.

Pour tout *x* réel, $g(x)\geq 0$

2) D'après le 1), pour tout réel *x*, $e^x-x-1\geq 0$, d'où, $e^x-x\geq 1$. Conclusion: $e^x-x>0$

Partie B

1) a) limite en $+\infty$ de *f*.

$$f(x)=\frac{x}{e^x\left(1-\dfrac{x}{e^x}\right)}=\frac{x}{e^x}\times\frac{1}{1-\dfrac{x}{e^x}}$$

On sait: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$, d'où, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$

On en déduit: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

limite en $-\infty$ de *f*.

Pour $x<0$, $f(x)=\dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x}-1}$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$, on obtient: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$

b) La droite d'équation $y=0$ (axe des abscisses) est asymptote à (C) en $+\infty$.

La droite d'équation $y=1$ est asymptote à (C) en $-\infty$.

2) a) $f'(x)=\dfrac{1(e^x-x)-(e^x-1)\cdot x}{(e^x-x)^2}=\dfrac{e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}$

b) Le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x$, d'où, *f* est strictement croissante sur $]-\infty;1]$ et strictement décroissante sur $[1;+\infty[$

Tableau de variations:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	
f	-1	↗	$\dfrac{1}{e-1}$	↘	0

3) a) Une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est: $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

$y=1\cdot x-0=x$

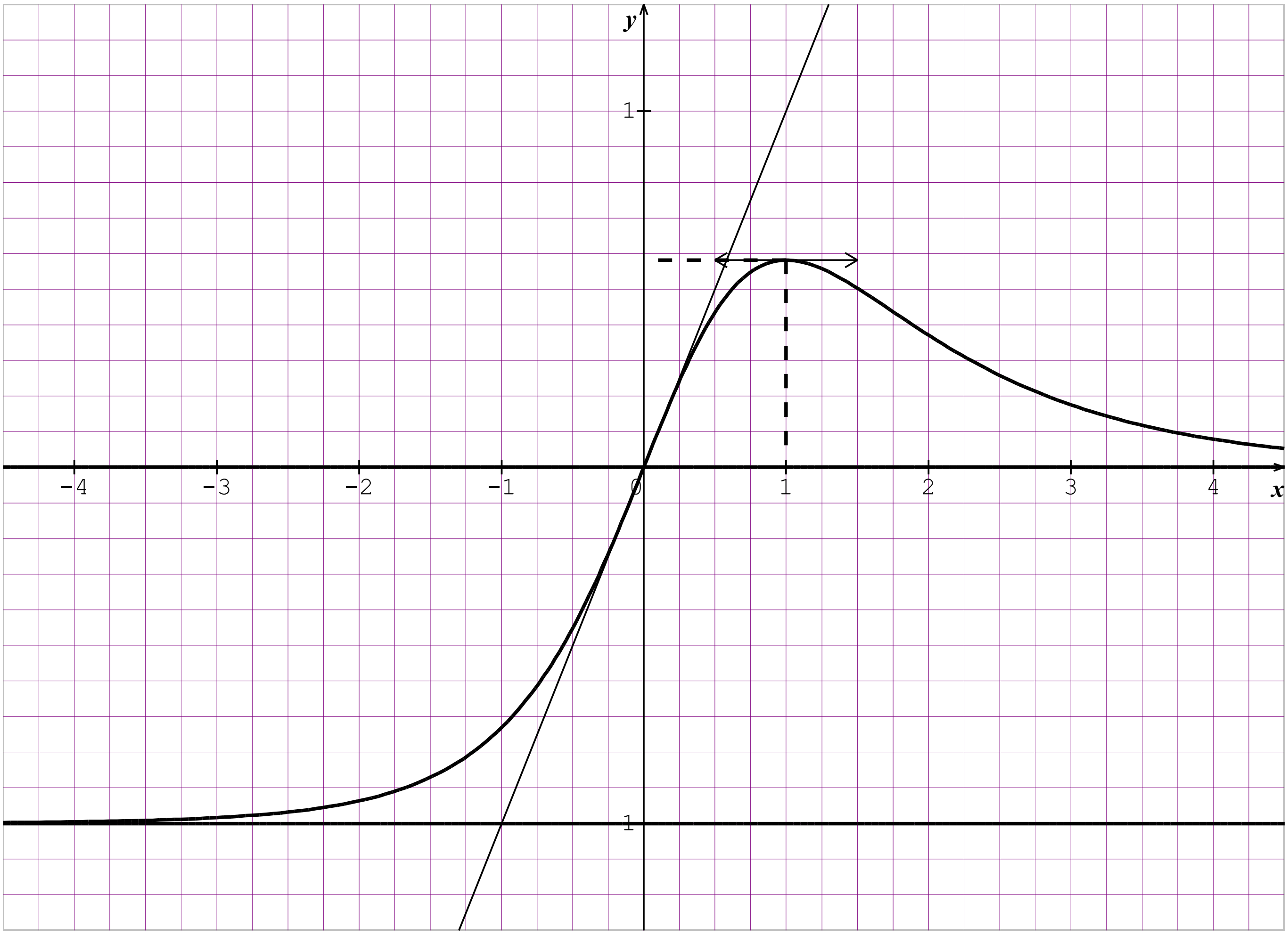
b) La position relative de (C) et (T) est donnée par le signe de $f(x)-x=\dfrac{x}{e^x-x}-x=\dfrac{x(1-e^x+x)}{e^x-x}$

$f(x)-x=\dfrac{-x\times g(x)}{e^x-x}$ avec $g(x)=e^x-x-1$ étudié en A)

Comme $g(x)\geq 0$ et $e^x-x>0$, le signe de $f(x)-x$ est le signe opposé de x.

Conclusion: (C) au-dessus de (T) sur $]-\infty;0]$ et au-dessous de (T) sur $[0;+\infty[$

4) Construction:



Exercice 4 (Nouvelle-Calédonie novembre 2004)

(u_n) et (v_n) sont définies, pour tout entier naturel *n*, par $\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2} \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0=4 \\ v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}+v_n}{2} \end{cases}$

1) $u_1=\dfrac{3+4}{2}=\dfrac{7}{2}$, $v_1=\dfrac{\dfrac{7}{2}+4}{2}=\dfrac{15}{4}$, $u_2=\dfrac{\dfrac{7}{2}+\dfrac{15}{4}}{2}=\dfrac{29}{8}$, $v_2=\dfrac{\dfrac{29}{8}+\dfrac{15}{4}}{2}=\dfrac{59}{16}$

2) (w_n) est définie, pour tout entier naturel *n*, par: $w_n=v_n-u_n$

a) $w_{n+1}=v_{n+1}-u_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}+v_n-u_n-v_n}{2}=\dfrac{\dfrac{u_n+v_n}{2}-u_n}{2}=\dfrac{v_n-u_n}{4}=\dfrac{w_n}{4}$

Donc, (w_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$

b) Comme $w_0=v_0-u_0=1$, on a: pour tout entier naturel *n*, $w_n=\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

Comme $0<\dfrac{1}{4}<1$, la suite (w_n) converge vers 0

3) Signe de $u_{n+1}-u_n$

$u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n+v_n}{2}-u_n=\dfrac{w_n}{2}$. Comme $w_n>0$, la suite (u_n) est strictement croissante.

Signe de $v_{n+1}-v_n$

$v_{n+1}-v_n=\dfrac{u_{n+1}+v_n}{2}-v_n=\dfrac{u_{n+1}-v_n}{2}=\dfrac{\dfrac{u_n+v_n}{2}-v_n}{2}=\dfrac{-w_n}{4}$. Comme $w_n>0$, la suite (v_n) est strictement décroissante.

Puisque les trois conditions: (u_n) croissante, (v_n) décroissante et (v_n-u_n) converge vers 0 sont vérifiées, les deux suites sont adjacentes

Par conséquent, elles convergent vers une limite commune *l*.

4) (t_n) est définie par $t_n=\dfrac{u_n+2v_n}{3}$

a) Soit un entier naturel *n*, on a: $t_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}+2v_{n+1}}{3}=\dfrac{\dfrac{u_n+v_n}{2}+u_{n+1}+v_n}{3}=\dfrac{\dfrac{u_n+v_n}{2}+\dfrac{u_n+v_n}{2}+v_n}{3}=\dfrac{u_n+2v_n}{3}=t_n$

La suite (t_n) est donc constante.

Or $t_0=\dfrac{11}{3}$, d'où, pour tout entier naturel *n*, $t_n=\dfrac{11}{3}$

b) Comme (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite *l*, (t_n) converge vers $\dfrac{l+2l}{3}=l$

Les suites (u_n) et (v_n) convergent vers $\dfrac{11}{3}$
