Nouvelle Calédonie novembre 2006

Exercice 1

Loi binomiale: deux issues (S et $\bar{S}$) et répétition d'épreuves **indépendantes...**

X suit la loi binomiale de paramètres *n* (nombre d'épreuves) et *p* (probabilité de *S*) et $q=1-p$ (probabilité de $\bar{S}$) : Pour $0\leqslant k\leqslant n$, $P(X=k)=\binom{n}{k}\, p^k\, q^{n-k}$ $\qquad E(X)=np$

1) $P(M)=\dfrac{5}{1000}=0{,}005$

2) a)b) On peut considérer que le nombre d'animaux dans le cheptel est suffisamment grand pour que les choix d'animaux soient **indépendants**. *X* suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}$ (10;0,005) et $E(X)=10\times 0{,}005=0{,}05$

On a: $P(A)=P(X=0)=\binom{10}{0}\, p^0\, q^{10}$ avec $p=0{,}005$ et $q=1-p=0{,}995$

$P(A)=0{,}995^{10}$ $\approx$ 0,951 à 10^{-3} par défaut et $P(B)=P(X\geqslant 1)=1-P(A)=1-0{,}995^{10}$ $\approx$ 0,049 à 10^{-3} par excès.

3) On sait: $P_M(T)=0{,}8$ et $P_{\bar{M}}(\bar{T})=0{,}9$

a) b) c) D'après la formule des probabilités totales:

$P(T)=P(T\cap M)+P(T\cap \bar{M})$

$P(T)=P(M)\times P_M(T)+P(\bar{M})\times P_{\bar{M}}(T)$

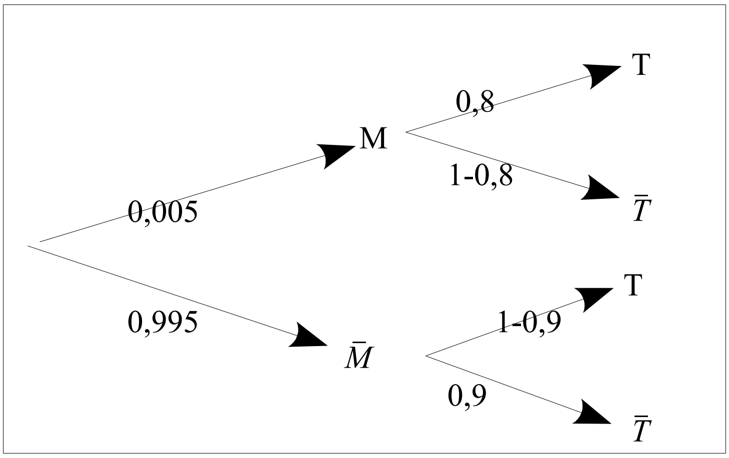
$P(T)=0{,}8\times 0{,}005+0{,}995\times 0{,}1$

$P(T)=0{,}004+0{,}0995=0{,}1035$

D'après la formule des probabilités conditionnelles:

$P_T(M)=\dfrac{P(T\cap M)}{P(T)}=\dfrac{P_M(T)\times P(M)}{P(T)}$

$P_T(M)=\dfrac{0{,}8\times 0{,}005}{0{,}1035}=\dfrac{0{,}004}{0{,}1035}$ $\approx$ 0,039 à 10^{-3} par excès.



Exercice 2

Quelques remarques préliminaires:

au 1a) $z\in\mathbb{C}$ le polynôme $P(z)=z^3-(4+\mathrm{i})\,z^2+(7+\mathrm{i})\,z-4$ est un élément de $\mathbb{C}$. Si on veut déterminer sa partie réelle et sa partie imaginaire, il faut poser $z=x+iy$ avec *x* et *y* **réels.** On pourra alors mettre $P(z)=X+iY$ avec *X* et *Y* **réels**.

Ce qui donne:

$X=x^3-4\,x^2-x(3\,y^2-2\,y-7)+4\cdot y^2-y-4$ et $Y=\cdot\, x^2\cdot(3\cdot y-1)+x\cdot(1-8\cdot y)-y^3+y^2+7\cdot y$

Dans l'exercice, puisqu'on cherche un réel, on a $y=0$

au 1b): il suffit de chercher les termes de plus haut degré et de degré nul pour déterminer les **complexes** *a* et *b*, puis, de vérifier l'égalité.

Partie A

1 a) z_1 $\in\mathbb{R}$, donc la partie réelle de $z_1{}^3-(4+\mathrm{i})z_1{}^2+(7+\mathrm{i})z_1-4$ est $z_1{}^3-4\,z_1{}^2+7\,z_1-4$ et la partie imaginaire est $-z_1{}^2+z_1$

z_1 est une solution ***réelle*** de (E) si et seulement si $\begin{cases} z_1{}^3-4\,z_1{}^2+7\,z_1-4=0 \\ -z_1{}^2+z_1=0 \end{cases}$

La deuxième équation se factorise en $z_1(1-z_1)=0$

La solution 0 ne convient pas. La solution $z_1=1$ convient.

b) En développant, réduisant et ordonnant $(z-1)(z-2-2\,\mathrm{i})(az+b)$ et par identification des coefficients, il vient: $az^3+(b-3\,a-2\,ai)\,z^2+(2\,a-3\,b+2\,ai-2\,bi)\,z+2\,b+2\,bi=z^3-(4+\mathrm{i})\,z^2+(7+\mathrm{i})z-4$

On a alors $a=1$ et $b=\dfrac{-2}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{-2(1-\mathrm{i})}{2}=-1+\mathrm{i}$

et ***il faut vérifier***: $-1+\mathrm{i}-3-2\,\mathrm{i}=-4-\mathrm{i}$ et $2+3-3\,\mathrm{i}+2\,\mathrm{i}+2\,\mathrm{i}+2=7+\mathrm{i}$

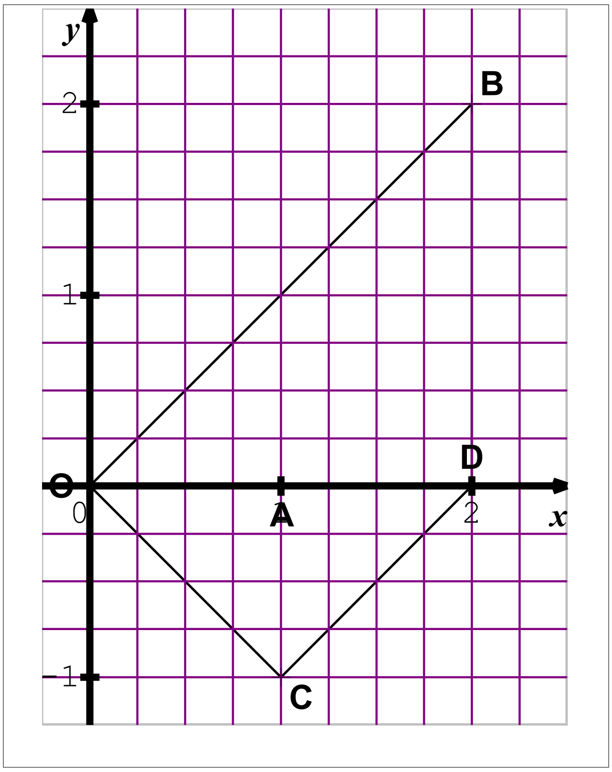
2) le produit est nul si et seulement si ... trois solutions complexes: $z_1=1$, $z_2=2+2\mathrm{i}$, $z_3=1-\mathrm{i}$.

Partie B

1) 2) Dans le repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, $A(1)$ $B(2+2\mathrm{i})$ $C(1-\mathrm{i})$

$\left|\dfrac{2+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right|=\dfrac{|2+2\mathrm{i}|}{|1-\mathrm{i}|}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2$ et $\arg\dfrac{2+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\arg(2+2\mathrm{i})-\arg(1-\mathrm{i})=\dfrac{\pi}{4}-\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{2}\quad[2\pi]$

$\dfrac{2+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=2\,\mathrm{e}^{i\pi/2}$



On peut aussi réduire le quotient: $\dfrac{2+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{2(1+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{2}=\ldots=2\mathrm{i}=2\,\mathrm{e}^{i\pi/2}$

Interprétation géométrique: $\left|\dfrac{2+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right|=\dfrac{|2+2\mathrm{i}|}{|1-\mathrm{i}|}=\dfrac{OB}{OC}$

$OB=2\,OC$

$\arg(2+2\mathrm{i})-\arg(1-\mathrm{i})=(\vec{u};\overrightarrow{OB})-(\vec{u};\overrightarrow{OC})=(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB})=\dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$

OBC est un triangle rectangle, indirect et non isocèle en O.

3) Les calculs précédents ont aussi montré: $(\vec{u};\overrightarrow{OB})=\dfrac{\pi}{4}$ et $(\vec{u};\overrightarrow{OC})=-\dfrac{\pi}{4}$

Or, $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ La droite (OA) est donc bissectrice de l'angle $\widehat{BOC}$ du triangle OBC .

4) L'affixe z_D de D est définie par:

$z_D-z_C=\mathrm{e}^{-i\pi/2}(z_O-z_C)=-\mathrm{i}\times(-z_C)$

$z_D=(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})=2$

5) On a alors: $(\overrightarrow{CO};\overrightarrow{CD})=-\dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ et comme $(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB})=\dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ les droites (CD) et (OB) sont parallèles.

Le quadrilatère $OCDB$ est un trapèze rectangle; comme on a montré $OB=2\,OC$ et que $CO=CD$, ce n'est pas un rectangle.

Exercice 3

$u_0=\dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(u_n+\dfrac{2}{u_n}\right)$

1 a)b) *f* fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{2}{x}\right)$

f, est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f'(x)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{2}{x^2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2-2}{x^2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x^2}\right)$

Puisque $x>0$ le signe de $f'(x)$ est celui de $x-\sqrt{2}$, d'où, ...

f est strictement décroissante sur $]0;\sqrt{2}]$ et strictement croissante sur $[\sqrt{2};+\infty[$

Elle atteint donc son minimum en $\sqrt{2}$ et ce minimum vaut $f(\sqrt{2})=\sqrt{2}$

Représentation graphique: respecter les unités. (Tangente "horizontale"... on peut remarquer: Asymptote d'équation $y=\dfrac{1}{2}x$ et pour b), construire la droite d'équation $y=x$)

2 a) Raisonnement par récurrence:

initialisation: $u_1=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}+4\right)=\dfrac{9}{4}=2{,}25$ $\qquad u_1\geqslant\sqrt{2}$ est vérifiée

hérédité: soit un entier naturel non nul k tel que $u_k \geqslant \sqrt{2}$,
$u_{k+1} = f(u_k)$ f strictement croissante sur $[\sqrt{2};+\infty[$ et $u_k \geqslant \sqrt{2}$ implique $f(u_k) \geqslant f(\sqrt{2})$
on a donc: $u_{k+1} \geqslant \sqrt{2}$ La proposition est héréditaire
conclusion: D'après l'axiome de récurrence ...

b) $f(x) - x = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x} - x = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{2} = \dfrac{(2-x^2)}{2x} = \dfrac{(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)}{2x}$

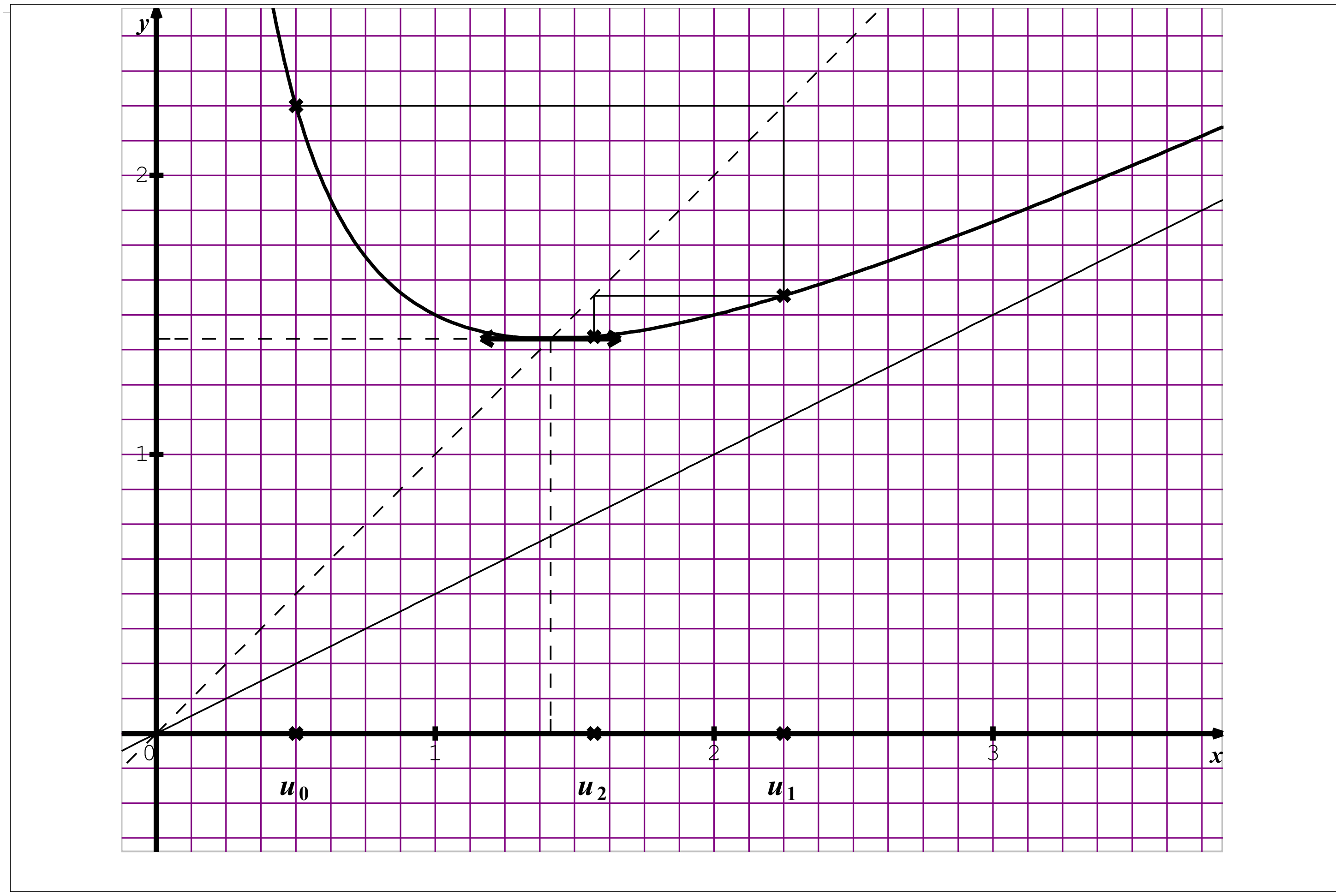
Si $x \geqslant \sqrt{2}$ alors $\sqrt{2} - x \leqslant 0$, $\sqrt{2}+x$ >=0 et $2x > 0$.
On obtient: $f(x) - x \leqslant 0$, d'où, si $x \geqslant \sqrt{2}$, $f(x) \leqslant x$

c) d) Comme $f(u_n) = u_{n+1}$ et que $f(u_n) \leqslant u_n$ d'après 2b), la suite (u_n) est décroissante et elle est minorée par $\sqrt{2}$, elle est donc convergente vers un réel l supérieur ou égal à $\sqrt{2}$

3) f est définie et **continue** sur $]0;+\infty[$ et la suite (u_n) converge vers l, donc, la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers $f(l)$. Or (u_{n+1}) converge comme (u_n) vers l. Conclusion $l = f(l)$

l est donc la solution sur $]0;+\infty[$ de $x = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$

Le calcul du 2b) montre que la solution positive est $\sqrt{2}$. $l = \sqrt{2}$



Exercice 4

Première partie

1) Le plan (P_1) est le plan (ACD) 2) La droite Δ_1 contient le point D
3) la droite Δ_1 est incluse dans le plan (P_1) 4) Δ_1 et Δ_2 sont sécantes en $I(3;0;10)$
5) La représentation paramétrique de $(P_1) \cap (P_2)$ est $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 3+6t \end{cases}$

Preuves: Appartenance des points à ...

Point	$(P_1): 7x+4y-3z+9=0$	$(P_2): x-2y=0$	$\Delta_1: \begin{cases} x=-1+t \\ y=-8+2t \\ z=-10+5t \end{cases}$	$\Delta_2: \begin{cases} x=7+2t' \\ y=8+4t' \\ z=8-t' \end{cases}$
$A(0;0;3)$	$7\times0+4\times0-3\times3+9=0$ vrai	$0-2\times0=0$ vrai	Si $t=1$ ... Faux	si $t'=-2$ ... Faux
$B(2;0;4)$	$7\times2+4\times0-3\times4+9=0$ Faux	$2-2\times0=0$ faux	Si $t=4$ ... Faux	Si $t'=-2$ ... Faux
$C(-1;1;2)$	$7\times(-1)+4\times1-3\times2+9=0$ Vrai	$-1-2\times1=0$ Faux	Si $t=0$, Faux	Si $t'=6$ ... Faux
$D(1;-4;0)$	$7\times1+4\times(-4)-3\times0+9=0$ Vrai	$1-2\times(-4)=0$ Faux	Si $t=2$ ..., Vrai	si $t'=8$ ... Faux

1) *A*, *C*, *D* sont des points de (P_1) et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\\-4\\-3\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, d'où, 1c)

3) Un vecteur directeur de Δ_1 est $\vec{u_1}\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$ et un vecteur normal à (P_1) est $\vec{n_1}\begin{pmatrix}7\\4\\-3\end{pmatrix}$. Comme $\vec{u_1}\cdot\vec{n_1}$ =...=0, les vecteurs sont orthogonaux. Δ_1 et (P_1) sont parallèles. Or *D* est commun aux deux d'où 3b).
On peut aussi vérifier que quelque soit le paramètre *t*, l'équation du plan est vérifiée:
$7(-1+t)+4(-8+2t)-3(-10+5t)+9=-7-32+30+9+7t+8t-15t=0$

4) Le système $\begin{cases} -1+t=7+2t' \\ -8+2t=8+4t' \\ -10+5t=8-t' \end{cases}$. En faisant la ligne (2) + 4×ligne (3), il vient: $t=4$, puis $t'=-2$ et en remplaçant dans la ligne (1), $-1+4=7+2\times(-2)$ est vérifiée. Le point $I(3;0;10)$ de paramètres respectifs $t=4$ et $t'=-2$ est un point commun à Δ_1 et Δ_2. Comme le point *D* est un point de Δ_1 et non de Δ_2, les droites sont sécantes (donc coplanaires). (Réponse 4c))

5) Le système $\begin{cases} 7x+4y-3z+9=0 \\ x-2y=0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} y=t \\ x=2t \\ 7\times2t+4\times t-3z+9=0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=3+6t \end{cases}$ d'où 5b)

Deuxième partie

1) Dans le repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$,

$M(x;y;z)$ est un point de (*D*) passant par $A(0;0;3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ si et seulement si il existe un réel *a* tel que $\overrightarrow{AM} = a\ \vec{u}$ si et seulement si $\begin{cases} x-0=a \\ y-0=0 \\ z-3=-a \end{cases}$

et $M'(x';y';z')$ est un point de (*D'*) passant par $B(2;0;4)$ et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ si et seulement si il existe un réel *b* tel que $\overrightarrow{BM'} = b\ \vec{v}$ si et seulement si $\begin{cases} x'-2=0 \\ y'-0=b \\ z'-4=b \end{cases}$

On a alors: $\overrightarrow{MM'}\begin{cases} x'-x=2-a \\ y'-y=b \\ z'-z=4+b+a-3=1+a+b \end{cases}$

2) (MM') $\perp$ (D) si et seulement si $\overrightarrow{MM'}\cdot\vec{u}=0$ si et seulement si $(2-a)\times 1+b\times 0+(1+a+b)\times(-1)=0$ si et seulement si $2a+b=1$

(MM') $\perp$ (D') si et seulement si $\overrightarrow{MM'}\cdot\vec{v}=0$ si et seulement si $(2-a)\times 0+b\times 1+(1+a+b)\times 1=0$ si et seulement si $a+2b=-1$

(MM') est perpendiculaire à (D) **et** à (D') si et seulement si $\begin{cases} 2a+b=1 \\ a+2b=-1 \end{cases}$

3) Le couple solution de ce système est $(1;-1)$ (Par exemple en faisant 2×ligne(1)–ligne(2), on a: $3a=3$ ... Lorsque $a=1$, on obtient le point $H(1;0;2)$ de (D). Lorsque $b=-1$, on obtient le point $H'(2;-1;3)$ de (D'). $HH'^2=(2-1)^2+(-1-0)^2+(3-2)^2=3$. $HH'=\sqrt{3}$

4) a) b) $MM'^2=(2-a)^2+b^2+(1+a+b)^2=4-4a+a^2+b^2+1^2+2(a+b)+(a+b)^2$

$MM'^2=3+1-2a+a^2+b^2+2b+1+(a+b)^2=3+(a-1)^2+(b+1)^2+(a+b)^2$

Cette somme est minimale lorsque $\begin{cases} (a+b)^2=0 \\ (a-1)^2=0 \\ (b+1)^2=0 \end{cases}$. Ce système a pour solutions $a=1$ et $b=-1$. On retrouve donc les points H et H' et dans ce cas, $MM'^2=3$.