Problème (Polynésie juin 2003)

Partie A: f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^x \cos x$

1) Pour tout x réel, on sait: $-1 \leq \cos x \leq 1$ et comme le réel e^x est strictement positif, on obtient:

Pour tout x réel: $-e^x \leq e^x \cos x \leq e^x$

Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, on obtient d'après le théorème des gendarmes: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=0$

La droite d'équation $y=0$ (axe des abscisses) est asymptote à C_f en $-\infty$.

2) Les abscisses des points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $f(x)=0$, comme $e^x \neq 0$, on a: $\cos x=0$. Les solutions sont les réels $\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

3) On se place sur l'intervalle $I=\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

$$\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\cos x \cdot \sin\frac{\pi}{4}-\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{4}\right)=...=\cos x-\sin x$$

4) f est le produit de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, donc, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, $f'(x)=e^x \cos x - e^x \sin x = e^x(\cos x - \sin x)$

D'après le 3), le signe de $f'(x)$ est celui de $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

Si $\frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ alors $\frac{-\pi}{4} \leq x+\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$

Le cosinus d'un angle est positif lorsque le point est dans le premier ou quatrième quadrant.

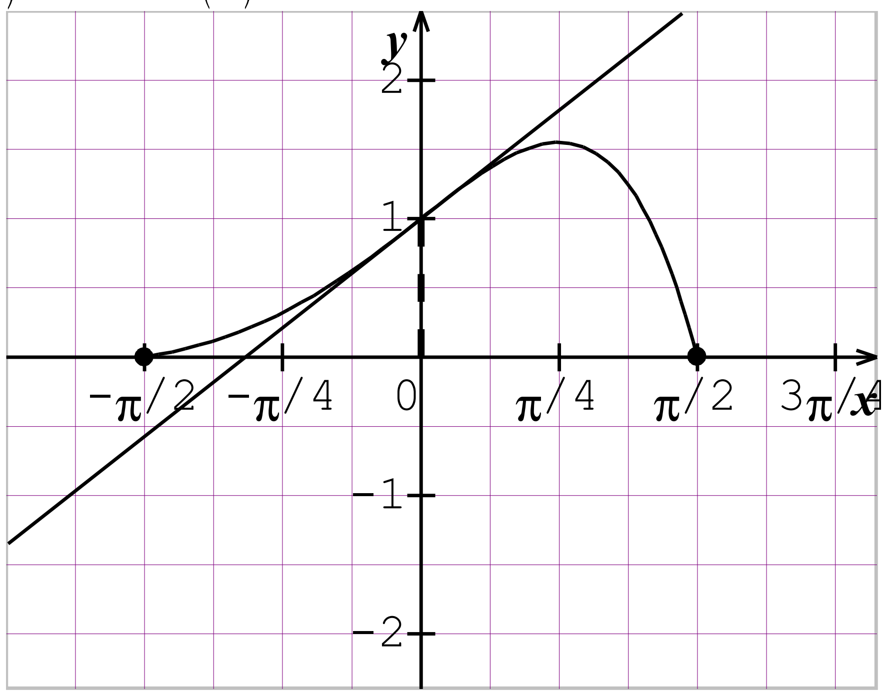
On a donc: $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \geq 0$. f est donc croissante sur $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right]$

Si $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ alors $\frac{\pi}{2} \leq x+\frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4}$

Le cosinus d'un angle est négatif lorsque le point est dans le deuxième ou troisième quadrant.

On a donc: $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \leq 0$. f est donc décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$

$f\left(\frac{-\pi}{2}\right)=0$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$



6) Sur l'intervalle $I_1=\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, *f* est croissante et $f(0)=1$, d'où, l'équation $f(x)=\frac{1}{2}$ n'a pas de solution sur I_1

Sur l'intervalle $I_2=\left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$, *f* est continue, strictement décroissante.

f réalise donc une bijection de I_2 sur $f(I_2)=\left[0;\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}\right[$.

Comme $\frac{1}{2}\in\left[0;\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}\right[$, l'équation $f(x)=\frac{1}{2}$ a une et une seule solution sur I_2 .

Finalement: l'équation $f(x)=\frac{1}{2}$ a une et une seule solution sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

La calculatrice donne: $f(1{,}45)\approx 0{,}513$ et $f(1{,}46)\approx 0{,}476$
la solution *a* est comprise entre 1,45 et 1,46

7) $f''(x)=e^x(\cos x-\sin x)+e^x(-\sin x-\cos x)=-2e^x\cdot\sin x$

Or, $\sin x\leq 0$ sur $\left[\frac{-\pi}{2};0\right]$ et $\sin x\geq 0$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

La dérivée seconde s'annule en 0 en changeant de signe, d'où, $f'(x)$ atteint un extremum en 0.

Comme $f''(x)\geq 0$ sur $\left[\frac{-\pi}{2};0\right]$ et $f''(x)\leq 0$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x)$ a un maximum en 0.

Ce maximum vaut $f'(0)=1$

L'équation de la tangente *T* en 0 est: $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ Une équation de (*T*) est: $y=x+1$

Partie B;

$n\in\mathbb{N}$, $I_n=\int_0^{\pi} e^x\cos(nx)\,dx$

1) Les fonctions cosinus et sinus sont des fonctions périodiques de période 2π .

On sait: $\cos(2k\pi)=1$ et $\cos((2k+1)\pi)=-1$ et $\sin(2k\pi)=0$ et $\sin((2k+1)\pi)=0$

$\cos(n\pi)=1$ lorsque *n* est un entier pair et $(-1)^n=1$ lorsque *n* est un entier pair

$\cos(n\pi)=-1$ lorsque *n* est un entier impair et $(-1)^n=-1$ lorsque *n* est un entier impair.

On a bien: $\cos(n\pi)=(-1)^n$ pour tout entier *n*;

$\sin(n\pi)=0$ pour tout entier *n*.

Rappel: Formule de Moivre $(e^{i\theta})^n=e^{ni\theta}$ soit $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

Si $\theta=\pi$, $(-1)^n=\cos n\pi+i\sin n\pi$. La partie réelle $\cos n\pi=(-1)^n$, la partie imaginaire $\sin n\pi=0$

2) $I_n=\int_0^{\pi} e^x\cos(nx)\,dx$

Posons $u'(x)=e^x$ et $v(x)=\cos(nx)$, on en déduit: $u(x)=e^x$ et $v'(x)=-n\sin(nx)$

u, *u*', *v*, *v'* sont des fonctions continues sur $[0;\pi]$, on peut donc appliquer l'intégration par parties:

$$I_n=\left[e^x\cos(nx)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} e^x(-n\sin(nx))\,dx$$

$$I_n=e^{\pi}\cos(n\pi)-e^0\cos(n0)+n\int_0^{\pi} e^x\sin(nx)\,dx=(-1)^n e^{\pi}-1+nJ_n \quad\text{avec}\quad J_n=\int_0^{\pi} e^x\sin(nx)\,dx$$

Faisons une intégration par parties pour calculer J_n

Posons: $u'(x)=e^x$ et $v(x)=\sin(nx)$, on en déduit: $u(x)=e^x$ et $v'(x)=n\cos(nx)$

Problème (Polynésie juin 2003)

$$J_n=\left[e^x\sin(nx)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x n\cos(nx)\,dx=0-nI_n$$

Finalement: $I_n=(-1)^n e^{\pi}-1+n(-nI_n)$

On en déduit: $I_n+n^2 I_n=(-1)^n e^{\pi}-1$, puis $(1+n^2)I_n=(-1)^n e^{\pi}-1$, enfin, $I_n=\dfrac{(-1)^n e^{\pi}-1}{1+n^2}$

Remarque: on peut faire aussi:

Posons: $u(x)=e^x$ *et* $v'(x)=\cos(nx)$ *, on en déduit:* $u'(x)=e^x$ *et* $v(x)=\dfrac{1}{n}\sin(nx)$

$$I_n=\left[e^x\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\left(\frac{1}{n}\sin(nx)\right)dx$$

$$I_n=0-\frac{1}{n}K_n\,avec\,K_n=\int_0^{\pi}e^x\sin(nx)\,dx$$

Calcul de K_n *: Posons:* $u(x)=e^x$ *et* $v'(x)=\sin(nx)$ *, on en déduit:* $u'(x)=e^x$ *et* $v(x)=\dfrac{-1}{n}\cos(nx)$

$$K_n=\left[e^x\left(\frac{-1}{n}\cos(nx)\right)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\left(\frac{-1}{n}\cos(nx)\right)dx=\frac{(-1)(-1)^n e^{\pi}-(-1)}{n}+\frac{1}{n}I_n$$

Finalement: $I_n=\dfrac{-1}{n}\times\left[\dfrac{(-1)(-1)^n e^{\pi}-(-1)}{n}+\dfrac{1}{n}I_n\right]$

On en déduit: $n^2 I_n=(-1)^n e^{\pi}-1-I_n$ ....

$$|I_n|=\left|\frac{(-1)^n e^{\pi}-1}{1+n^2}\right|=\frac{1}{1+n^2}\left|(-1)^n e^{\pi}-1\right|$$

D'après l'inégalité triangulaire: $|a+b|\le|a|+|b|$ pour tous réels *a* et *b*, on obtient:

$$\left|(-1)^n e^{\pi}-1\right|\le\left|(-1)^n e^{\pi}\right|+|-1|\le e^{\pi}+1$$

Finalement: $|I_n|\le\dfrac{e^{\pi}+1}{1+n^2}$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}1+n^2=+\infty$, on en déduit: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{e^{\pi}+1}{1+n^2}=0$

On a donc: $\lim\limits_{n\to+\infty}|I_n|=0$ (Théorème des gendarmes en remarquant que $|I_n|\ge 0$)

On peut conclure: $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$

Rappel: $|X|=A\,(A>0)$ équivaut à $X=A$ *ou* $X=-A$

$|X|\le A\,(A>0)$ équivaut à $-A\le X\le A$

$|X|\ge A\,(A>0)$ équivaut à $X\le -A$ *ou* $X\ge A$

Partie C

(E): $y'-2y-1=0$

(E'): $y'-2y=1-e^x\sin x$

où *y* est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

1) L'affirmation "(*E*) admet un polynôme du premier degré pour solution" est fausse.

Preuve: Posons $y=ax+b$ avec $a\neq 0$, on a alors, $y'=a$

Si *y* est solution, on obtient: , $a-2ax-2b-1=0$ pour tout *x* réel. Nécessairement *a* est nul.

Il n'existe pas de polynôme du premier degré solution de (*E*).

Problème (Polynésie juin 2003)

rappel: D'après le cours, on sait que les solutions de (*E*) sont les fonctions: $x \mapsto C e^{2x} - \frac{1}{2}$

2) L'affirmation "si *g* est une fonction positive sur $\mathbb{R}$ solution de (*E*) alors *g* est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ " est vraie.
Preuve: *g* étant solution de (*E*), on a: $g' = 2g + 1$, comme *g* est positive, on en déduit que sa dérivée *g′* est positive et par conséquent *g* est croissante sur $\mathbb{R}$.

3) La fonction $h : x \mapsto 3e^{2x} + \frac{1}{2}$ n'est pas solution de (*E*), car, $h'(x) = 6e^{2x}$ et par conséquent $h'(x) - 2h(x) - 1 = 6e^{2x} - 2\left(3e^{2x} + \frac{1}{2}\right) - 1 = -2$

(*E*) n'est pas vérifiée.

En revanche: la fonction $x \mapsto 3e^{2x} - \frac{1}{2}$ *est solution de (E)*

4) "La primitive *F* de *f* définie par $f(x) = e^x \cos x$ et qui s'annule en 0 est solution de (*E'*)" est vraie
Preuve: On a $f(x) - 2F(x) = 1 - e^x \sin x$

$$F(x) = \frac{e^x(\cos x + \sin x) - 1}{2}$$

Vérifions que la fonction *F* ainsi définie est bien la primitive de *f* qui s'annule en 0

$$F(0) = \frac{1 - 0 - 1}{2} = 0$$

$$F'(x) = \frac{1}{2} \times \left(e^x(\cos x + \sin x) + e^x(-\sin x + \cos x)\right) = f(x)$$

Autre méthode: la primitive de *f* qui s'annule en 0 est la fonction $F : x \mapsto \int_0^x e^t \cos t \, dt$

L'intégration par parties faite au B) est valable pour $n = 1$ et par conséquent, on obtient:

$$F(x) = \left[e^t \cos t\right]_0^x - \int_0^x e^t(-\sin t)\, dt = e^x \cos x - 1 + \int_0^x e^t \sin t \, dt$$

$$\int_0^x e^t \sin t \, dt = \left[e^t \sin t\right]_0^x - \int_0^x e^t \cos t \, dt = e^x \sin x - F(x)$$

Finalement: $F(x) = e^x \cos x - 1 + e^x \sin x - F(x)$, soit, $F(x) = \frac{e^x(\cos x + \sin x) - 1}{2}$

il reste à vérifier que: $F'(x) - 2F(x) = 1 - e^x \sin x$