Exercice 4 Polynésie juin 2004

$(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $I_n = \int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{1+n+t}\,dt$

1 a) Comme $n+1>n$ et tous les termes sont strictement positifs, on a: $\frac{e^{-t^2}}{1+(n+1)+t} < \frac{e^{-t^2}}{1+n+t}$

On en déduit: $I_{n+1}<I_n$ (positivité de l'intégrale)
La suite (I_n) est strictement décroissante.

b) Tous les termes de la suite (I_n) sont positifs car, $t\mapsto\frac{e^{-t^2}}{1+n+t}$ est positif sur $[0;1]$

Remarque: D'après a) et b), (I_n) est convergente (suite décroissante et minorée)
c) $0\leqslant t\leqslant 1 \Rightarrow 0\leqslant t^2\leqslant 1 \Rightarrow -1\leqslant -t^2\leqslant 0 \Rightarrow e^{-1}\leqslant e^{-t^2}\leqslant 1$, soit, $0\leqslant e^{-t^2}\leqslant 1 \quad (1)$

D'autre part, $1+n\leqslant 1+t+n$, d'où, $0\leqslant\frac{1}{1+t+n}\leqslant\frac{1}{1+n} \quad (2)$

En multipliant membre-à-membre, les inégalités (1) et (2) de même sens et de termes positifs, il vient: $\frac{e^{-t^2}}{1+t+n}\leqslant\frac{1}{1+n}$

Par intégration, on a: $0\leqslant I_n\leqslant\frac{1}{1+n}$

Le théorème des gendarmes montre que la suite (I_n) converge vers 0.

2) *f* et *g* définies sur $[0;1]$ par: $f(x)=e^{-x}+x-1$ et $g(x)=1-x+\frac{x^2}{2}-e^{-x}$

a) $f'(x)=-e^{-x}+1 \qquad f'(x)>0$ sur $]0;1]$, $f'(0)=0$

$$\left(0<x\leqslant 1\Rightarrow -1\leqslant -x<0\Rightarrow\frac{1}{e}\leqslant e^{-x}<1\Rightarrow 1-e^{-x}>0\right)$$

f est donc strictement croissante sur $[0;1[$
f admet un minimum en 0 qui vaut $f(0)=0$.
Pour tout $x\in[0;1]$, $f(x)\geqslant 0$
b) Comme $g'(x)=f(x)$, on en déduit que *g* est strictement croissante sur $[0;1]$
c) Comme $f(x)\geqslant 0$ sur $[0;1]$, on a: $e^{-x}+x-1\geqslant 0$, soit, $1-x\leqslant e^{-x}$

Comme $g(x)\geqslant 0$ sur $[0;1]$, on a: $1-x+\frac{x^2}{2}-e^{-x}\geqslant 0$, soit, $e^{-x}\leqslant 1-x+\frac{x^2}{2}$

Pour tout $x\in[0;1]$, $1-x\leqslant e^{-x}\leqslant 1-x+\frac{x^2}{2}$

d) Si $t\in[0;1]$ alors $t^2\in[0;1]$. La double inégalité du 2c) s'applique à t^2 et $1-t^2\leqslant e^{-t^2}\leqslant 1-t^2+\frac{t^4}{2}$

e) D'autre part , si $0\leqslant t\leqslant 1, 1+n\leqslant 1+n+t\leqslant 2+n$, soit $\frac{1}{2+n}\leqslant\frac{1}{1+n+t}\leqslant\frac{1}{1+n}$

d'où, $\left(\frac{1-t^2}{2+n}\right)\leqslant\frac{e^{-t^2}}{1+t+n}\leqslant\left(\frac{1-t^2+\frac{t^4}{2}}{1+n}\right)$

Par intégration entre 0 et 1,

$$\int_0^1\left(\frac{1-t^2}{2+n}\right)dt\leqslant\int_0^1\frac{e^{-t^2}}{1+t+n}\,dt\leqslant\int_0^1\left(\frac{1-t^2+\frac{t^4}{2}}{1+n}\right)dt$$

$$\frac{1}{2+n}\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}\left[t-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{10}t^5\right]_0^1$$

$$\frac{2}{3(n+2)} \leqslant I_n \leqslant \frac{23}{30(n+1)}$$

f) Pour avoir $I_p \leqslant 10^{-2}$ il suffit d'avoir: $\frac{23}{30(p+1)} \leqslant 10^{-2}$ soit $p+1 \geqslant \frac{2\,300}{30}$. p étant un entier, $p+1 \geqslant 77$

Si $p \geqslant 76$ alors $I_p \leqslant 10^{-2}$