EXERCICE 1 (4 points)

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $z^2-6z+13=0$.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

On considère les points A, B, C d'affixes respectives $a=3-2i$, $b=3+2i$, $c=4i$.

2. Faire une figure et placer les points A, B, C.
3. Montrer que OABC est un parallélogramme.
4. Déterminer l'affixe du point Ω, centre du parallélogramme OABC.
5. Déterminer et tracer l'ensemble des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=12$.
6. Soit M un point de la droite (AB). On désigne par β la partie imaginaire de l'affixe du point M.

   On note N l'image du point M par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

   a) Montrer que N a pour affixe $\frac{5}{2}-\beta+\frac{5}{2}i$.

   b) Comment choisir β pour que N appartienne à la droite (BC) ?

1) $z^2-6z+13=0$

Une méthode: forme canonique

$z^2-6z+13=0 \Leftrightarrow (z-3)^2-9+13=0 \Leftrightarrow (z-3)^2=4i^2 \Leftrightarrow z-3=-2i$ ou $z-3=2i$

Autre méthode: discriminant

$\Delta = 36-52 = 16i^2 = (4i)^2$, d'où, $z = \dfrac{-(-6)-4i}{2}$ ou $z = \dfrac{-(-6)+4i}{2}$

Solutions: $a=3-2i$; $b=3+2i$

2) figure

3) Étude de $OABC$

Par exemple:

L'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est 4i et celle de $\overrightarrow{OC}$ est 4i, ...

ou encore

le milieu de $[OB]$ a pour affixe: $\omega = \dfrac{3+2i}{2} = \dfrac{3}{2}+i$ et celui de $[AC]$ a pour affixe $\dfrac{3-2i+4i}{2}=\omega$ ...

ou encore: $\overrightarrow{OA}$ a pour affixe $3-2i$ et $\overrightarrow{CB}$ a pour affixe $3+2i-4i=$ ....

4) Voir 3)

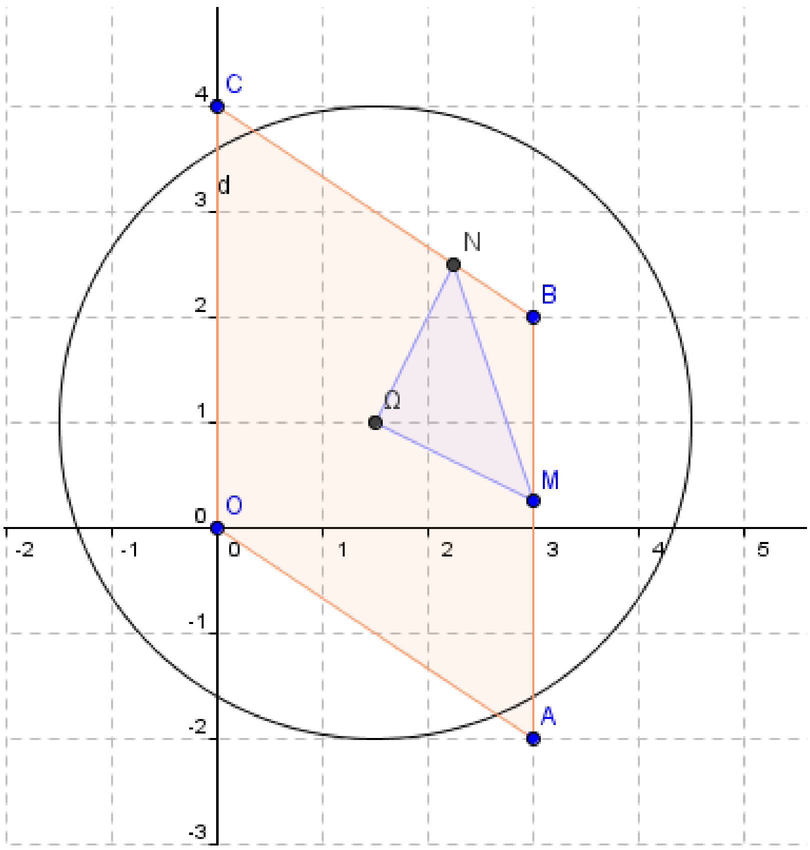
5) Ensemble $\mathscr{C}$ des points M vérifiant: $\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=12$

Le centre Ω de $OABC$ est l'isobarycentre des points O, A, B et C, d'où,

$\left\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = 12$

$\Leftrightarrow \quad \left\|4\,\overrightarrow{M\,\Omega}\right\| = 12$ ...

$\mathscr{C}$ est le cercle de centre Ω et de rayon 3



6) $M \in (AB)$

Une équation de (AB) est $x = 3$, d'où,

$z_M = 3 + \beta\mathrm{i}$.

N étant l'image de M par la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, on a:

$z_N = \mathrm{i}(z_M - \omega) + \omega =$

$\mathrm{i}(3 + \beta\mathrm{i} - \dfrac{3}{2} - \mathrm{i}) + \dfrac{3}{2} + \mathrm{i} = \dfrac{5}{2} - \beta + \dfrac{5}{2}\mathrm{i}$

$\overrightarrow{BC}$ a pour affixe $-3 + 2\mathrm{i}$

$N \in (BC)$ si et seulement si il existe un réel λ tel que $z_{\overrightarrow{CN}} = \lambda(-3 + 2\mathrm{i})$

On en déduit: $\begin{cases} \dfrac{5}{2} - \beta = -3\lambda \\ \dfrac{5}{2} - 4 = 2\lambda \end{cases}$, on en tire $\lambda = \dfrac{-3}{4}$

et $\beta = \dfrac{5}{2} - \dfrac{9}{4} = \dfrac{1}{4}$

EXERCICE 2 (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $\mathrm{A}(1,2,3)$, $\mathrm{B}(0,1,4)$, $\mathrm{C}(-1,-3,2)$, $\mathrm{D}(4,-2,5)$ et le vecteur $\vec{n}(2,-1,1)$.

1. a) Démontrer que les points A, B, C ne sont pas alignés.
   b) Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   c) Déterminer une équation du plan (ABC).

2. Soit (Δ) la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 4 - t \end{cases}$ avec $t \in \mathbf{R}$.

   Montrer que le point D appartient à la droite (Δ) et que cette droite est perpendiculaire au plan (ABC).

3. Soit E le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

   Montrer que le point E est le centre de gravité du triangle ABC.

1 a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-5\\-1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires ... (Preuve évidente)

b) $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times(-1) + (-1)\times(-1) + 1\times1 = ... = 0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times(-2) + (-1)\times(-5) + 1\times(-1) = ... = 0$, d'où, ...

c) $M(x; y; z) \in (ABC)$ si et seulement si $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM} = 0$ si et seulement si $2\times(x-1) + (-1)\times(y-2) + 1\times(z-3) = 0$
$2x - y + z - 3 = 0$ est ....

2) Le système: $\begin{cases} 4=2-2t \\ -2=-1+t \\ 5=4-t \end{cases}$ mène à $\begin{cases} t=-1 \\ t=-1 \\ t=-1 \end{cases}$. Le point D est le point de paramètre -1 ...

Un vecteur directeur de Δ est $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$ d'après la représentation paramétrique de Δ et comme $\vec{u} = -\vec{n}$, ...

3) Les coordonnées de E vérifient le système d'équations paramétriques de Δ et l'équation du plan (ABC) trouvée au 1c), d'où, $2(2-2t) - (-1+t) + (4-t) - 3 = 0$.
On ne tire $t = 1$
Les coordonnées de E sont $(0; 0; 3)$
Les coordonnées du centre de gravité de ABC sont $\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3}, \frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right) = ... = (0; 0; 3)$

CQFD

EXERCICE 3 (5 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. Soit f la fonction solution sur **R** de l'équation différentielle $y' = -y + 2$ telle que $f(\ln 2) = 1$.

   Proposition 1 : « La courbe représentative de f admet au point d'abscisse 0, une tangente d'équation $y = 2x$ ».

2. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $[A, +\infty[$ où A est un réel strictement positif.

   Proposition 2 : « Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)g(x) = 0$ ».

3. On admet qu'un bloc de glace fond en perdant 10 % de sa masse par minute.
   Sa masse initiale est de 10 kg.
   Proposition 3 : « À partir de la soixante-dixième minute, sa masse devient inférieure à 1 g ».

4. Soient A et B deux évènements d'un même univers Ω muni d'une probabilité p.

   Proposition 4 : « Si A et B sont indépendants et si $p(\mathrm{A}) = p(\mathrm{B}) = 0,4$ alors $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 0,8$ ».

5. Une usine fabrique des pièces. Une étude statistique a montré que 2 % de la production est défectueuse. Chaque pièce est soumise à un contrôle de fabrication. Ce contrôle refuse 99 % des pièces défectueuses et accepte 97 % des pièces non défectueuses.
   On choisit au hasard une pièce avant son passage au contrôle.
   Proposition 5 : « La probabilité que la pièce soit acceptée est égale à 0,9508 ».

1) Proposition 1: VRAIE

La solution f de l'équation différentielle est la fonction $x \mapsto C\ \mathrm{e}^{-x} + 2$ et $f(\ln(2)) = 1$, d'où, ..., $C = -2$

On a alors $f'(x) = 2\ \mathrm{e}^{-x}$ et $f'(0) = 2$. Comme $f(0) = ... = 0$

Une équation de la tangente à .... en ... est: $y = 2(x - 0) + 0 = 2x$

2) Proposition 2: FAUSSE

Contre-exemple:

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $[1; \infty[$ vérifie $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $g(x) = \mathrm{e}^{x}$ est telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \times g(x) = +\infty$

3) Proposition 3: FAUSSE

Soit M_n la masse à la minute n. On a donc: $\begin{cases} M_0 = 10 \\ M_{n+1} = 0,9 \times M_n \end{cases}$, soit, $M_n = 10 \times 0,9^n$ en kg

$10 \times 0,9^n < 10^{-3}$ si et seulement si $0,9^n < 10^{-4}$ si et seulement si $n > \dfrac{\ln(10^{-4})}{\ln(0,9)}$ si et seulement si $n > 87$ min

4) Proposition 4: FAUSSE

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Il n'y a aucune raison d'avoir $A \cap B = \emptyset$ lorsque A et B sont indépendants.

Exemple: Dans une urne on dispose de 100 jetons: 40 verts dont 16 carrés et 24 ronds.
60 rouges dont 24 carrés et 36 ronds.

On appelle A: "tirer un vert", et, B: "tirer un carré".

On suppose l'équiprobabilité du tirage d'un jeton.

On a: $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,4$ (40 jetons verts sur 100, 40 jetons carrés sur 100)

$P_A(B) = \frac{16}{40} = 0,4 = P(B)$ donc A et B sont indépendants.

$P(A \cup B) = 0,4 + 0,4 - 0,16 = 0,64$, car, $A \cap B$ contient les 16 jetons verts et carrés.

5) Proposition 5: VRAIE

D'après la loi de probabilités totales, en notant: D "défectueux" et A: "accepté", on a:

$P(D \cap A) + P(\overline{D} \cap A) = 0,02\times(1 - 0,99) + 0,98\times0,97 = ... = 0,9508$

EXERCICE 4 (7 points)

Partie A

Restitution organisée de connaissances.

On supposera connus les résultats suivants :

Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ avec $a<b$.

- Si $u \geqslant 0$ sur $[a,b]$ alors $\int_a^b u(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- Pour tous réels α et β, $\int_a^b [\alpha u(x)+\beta v(x)]\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b u(x)\mathrm{d}x + \beta \int_a^b v(x)\mathrm{d}x$.

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ avec $a<b$ et si, pour tout x de $[a,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=x+\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)$.

Sa courbe représentative C ainsi que la droite D d'équation $y=x$ sont données en annexe dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. Montrer que f est croissante et positive sur $[0,+\infty[$.
2. a) Montrer que la courbe C admet pour asymptote la droite D.

   b) Étudier la position de C par rapport à D.
3. Soit I l'intégrale définie par : $\mathrm{I}=\int_0^1 \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 [f(x)-x]\mathrm{d}x$. On ne cherchera pas à calculer I.

   a) Donner une interprétation géométrique de I.

   b) Montrer que pour tout réel $t \geqslant 0$, on a $\ln(1+t) \leqslant t$.

   (On pourra étudier les variations de la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par $g(t)=\ln(1+t)-t$)

   On admettra que pour tout réel $t \geqslant 0$, on a $\frac{t}{t+1} \leqslant \ln(1+t)$.

   c) En déduire que pour tout x de $[0,+\infty[$, on a : $\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1} \leqslant \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.

   d) Montrer que $\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-1}}\right) \leqslant \mathrm{I} \leqslant 1-\mathrm{e}^{-1}$.

   e) En déduire un encadrement de I d'amplitude $0,4$ par deux nombres décimaux.
4. On désigne par M et N les points de même abscisse x appartenant respectivement à C et D.

   On juge que M et N sont indiscernables sur le graphique lorsque la distance MN est inférieure à 0,5 mm.

   Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles M et N sont indiscernables.

   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

PARTIE A: ROC

Puisque pour tout x de $[a; b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors $g(x)-f(x) \geqslant 0$.

Puisque f et g sont continues sur $[a; b]$ alors $g-f$ est continue sur cet intervalle.

D'après le premier prérequis (positivité de l'intégrale), on a: $\int_a^b (g(x)-f(x))\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

D'après le second prérequis (linéarité de l'intégrale), $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$, ...

PARTIE B

1) $x \geqslant 0$ et $f(x) = x + \ln(1 + e^{-x})$

f est la somme de $x \mapsto x$ et $v : x \mapsto \ln(1 + e^{-x})$

v est la composée de $x \mapsto 1 + e^{-x}$ suivie de ln.

Toutes ces fonctions sont définies et dérivables sur $[0; +\infty[$, d'où, $f'(x) = 1 + \dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$

Comme pour tout X réel, $e^{X} > 0$, $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante.

Comme $f(0) = ... = \ln(2)$, on en déduit, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant \ln(2) > 0$

2) On étudie $f(x) - x = \ln(1 + e^{-x})$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$, d'où, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+e^{-x} = 1$

Comme la fonction ln est continue en 1, on a: $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+e^{-x}\right) = \ln(1) = 0$

Ce qui prouve que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à C_f en $+\infty$.

b) Pour $x \geqslant 0$, $1 + e^{-x} \geqslant 1$et comme ln est strictement croissante sur $[1; +\infty[$, $\ln(1 + e^{-x}) \geqslant \ln(1)$.

Or, $\ln(1) = 0$, ...

C_f est au-dessus de D.

3) a) Puisque $f(x) - x \geqslant 0$, I est la mesure d'aire en u.a. = 4 cm², du domaine limité par les droites d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées), $x = 1$ et compris entre C_f et D.

b) ***Une méthode:***

On pose $g(t) = \ln(1 + t) - t$

$g'(t) = \dfrac{1}{1+t} - 1 = \dfrac{-t}{1+t} \leqslant 0$ sur $[0; +\infty[$

g est donc décroissante et comme $g(0) = 0$, on a: $t \geqslant 0 \Rightarrow g(t) \leqslant g(0)$, soit, $g(t) \leqslant 0$.

$\ln(1 + t) \leqslant t$

Une autre méthode

Pour $x \in [0; t]$, on sait: $1 + x \geqslant 1$, d'où, $\dfrac{1}{1+x} \leqslant 1$.

En appliquant la partie A: $\displaystyle\int_0^t \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}\,x \leqslant \int_0^t 1\,\mathrm{d}\,x$, soit: $\ln(1+ t) \leqslant t$

L'encadrement admis: Pour $t \geqslant 0$, $\dfrac{t}{1+t} \leqslant \ln(1 + t)$ se démontre aisément en étudiant la variation de h définie par $h(t) = \dfrac{t}{1+t} - \ln(1 + t)$ sur $[0; +\infty[$.

c) au b), on a: $t \geqslant 0$, , $\dfrac{t}{1+t} \leqslant \ln(1 + t) \leqslant t$.

Comme $e^{-x} > 0$, le résultat est valable pour $t = e^{-x}$, soit $\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \leqslant \ln(1 + e^{-x}) \leqslant e^{-x}$

d) On applique le résultat de la partie A, et, on remarque que $\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ est de la forme $-\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) > 0$.

On a donc: $\left[-\ln\left(1+e^{-x}\right)\right]_0^1 \leqslant I \leqslant \left[-e^{-x}\right]_0^1$, soit, $-\ln(1 + e^{-1}) + \ln(2) \leqslant I \leqslant - e^{-1} + 1$

$\ln\left(\dfrac{2}{1+e^{-1}}\right) \leqslant I \leqslant 1 - e^{-1}$

d) La calculatrice donne 0,379 pour valeur par défaut de $\ln\left(\dfrac{2}{1+e^{-1}}\right)$ et,

0,633 pour valeur par excès de $1 - e^{-1}$
$0,3 \leqslant I \leqslant 0,7$
Important: on prend une valeur par défaut de la bonne inférieure et une valeur par excès de la borne supérieure.

4) M et N sont indiscernables lorsque $MN \leqslant 0,5$ mm
Or, $MN = (f(x) - x) \times 2$ cm, d'où $MN = 20\times(f(x) - x)$ mm
On veut donc: $f(x) - x \leqslant \dfrac{0,5}{20}$ $\quad f(x) - x \leqslant 0,0025$
La calculatrice donne pour $x = 6$, $f(x) - x = \ln(1 + e^{-x}) \approx 0,00247$ ...

$\ln(1 + e^{-x}) \leqslant 0,0025 \Leftrightarrow 1 + e^{-x} \leqslant e^{0,0025} \Leftrightarrow e^{-x} \leqslant e^{0,0025} - 1$ (qui est strictement positif)
$\Leftrightarrow -x \leqslant \ln(e^{0,0025} - 1)$
$\Leftrightarrow x \geqslant -\ln(e^{0,0025} - 1)$
Une valeur approchée de $-\ln(e^{0,0025} - 1)$ est 5,990

EXERCICE 4