Exercice 3 (Afrique juin 2004)

Les fonctions *f* sont définies sur $[0;1]$ et vérifient les conditions

(1) $f(0)=0$ et $f(1)=1$

(2) *f* est croissante sur l'intervalle $[0;1]$

(3) pour tout réel $x\in[0;1]$, $f(x)\leqslant x$

Le plan est rapporté au repère orthonormal $R=(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité 10 cm)

PARTIE A

Étude d'un modèle

g définie sur $[0;1]$ par $g(x)=x\,\mathrm{e}^{x-1}$

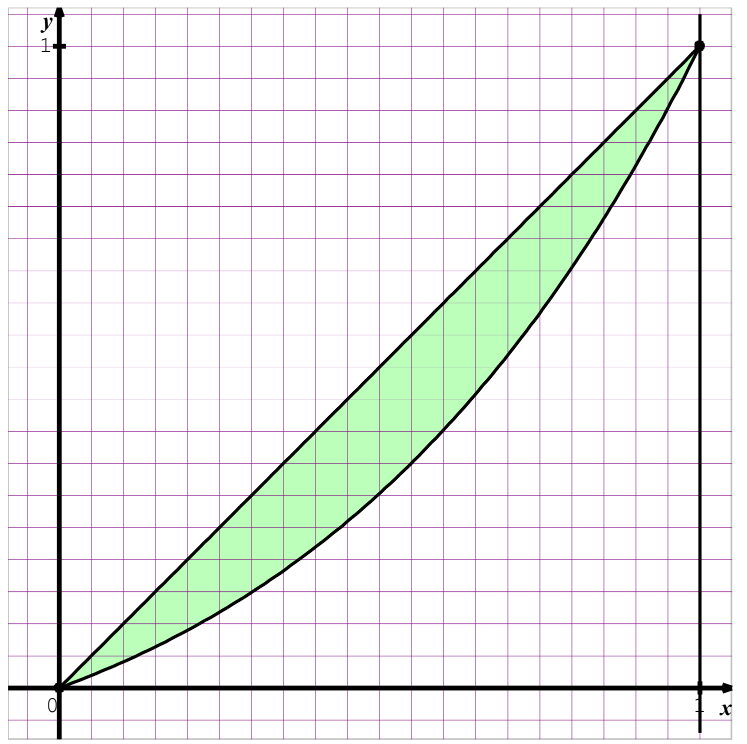
1) (1) est vérifiée car $g(0)=0\cdot\mathrm{e}^{-1}=0$ et $g(1)=1\cdot\mathrm{e}^{0}=1$

(2) est vérifiée car, *g* est dérivable sur $[0;1]$ et $g'(x)=1.\,\mathrm{e}^{x-1}+x\,.\,\mathrm{e}^{x-1}$ est la somme de réels positifs sur $[0;1]$. Comme $g'(x)\geqslant 0$ sur $[0;1]$, g est croissante sur l'intervalle $[0;1]$.

2) $g(x)-x=x\,\mathrm{e}^{x-1}-x=x\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{e}^{-1}-x=\dfrac{x}{\mathrm{e}}(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e})$

(3) est vérifiée car $0\leqslant x\leqslant 1$ implique $1\leqslant \mathrm{e}^{x}\leqslant \mathrm{e}$, la fonction exp étant croissante sur $\mathbb{R}$

On a donc: $\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}\leqslant 0$ et $\dfrac{x}{\mathrm{e}}\geqslant 0$ sur $[0;1]$. En conclusion: $g(x)\leqslant x$ sur $[0;1]$



Représentation graphique de *g*

3) Tracé

PARTIE B

Un calcul d'indice

1) Comme d'après (3), $x-f(x)\geqslant 0$, l'aire comprise entre la droite d'équation $y=x$, la courbe de *f* et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$ est, en u.a., $I=\int_0^1 (x-f(x))dx$

2) ***Propriétés utilisées***: linéarité de l'intégrale et I.p.p. avec $u(x)=x$ et $v'(x)=\mathrm{e}^{x-1}$

d'où, $u'(x)=1$ et $v(x)=\mathrm{e}^{x-1}$

Les conditions pour une I.p.p. qui sont: *u*, *v* dérivables à dérivées continues sur $[0;1]$, sont vérifiées.

$$I_g=\int_0^1 (x-x\,\mathrm{e}^{x-1})dx=\int_0^1 x\,dx-\int_0^1 (x\,\mathrm{e}^{x-1})dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-\left[\!\left[\,\left[x\,\mathrm{e}^{x-1}\right]_0^1-\int_0^1 \mathrm{e}^{x-1}\,dx\right]\!\right]$$

$$I_g=\frac{1}{2}-\left[(1-0)-\left[\mathrm{e}^{x-1}\right]_0^1\right]\ =\ \frac{1}{2}-\left(1-\left(1-\frac{1}{e}\right)\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\mathrm{e}}$$

3) f_n définies sur $[0;1]$ par $f_n(x)=\dfrac{2x^n}{1+x}$ où *n* entier naturel supérieur ou égal à 2.

a) $I_n=\int_0^1 (x-f_n(x))dx$ et $u_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx$

Linéarité de l'intégrale: $I_n=\int_0^1 (x-f_n(x))dx=\int_0^1 x\,dx-\int_0^1 f_n(x)dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-u_n=\frac{1}{2}-u_n$

b) soit $0\leqslant t\leqslant 1$, on a alors en multipliant la double inégalité par t^n qui est positif: $0\leqslant t^{n+1}\leqslant t^n$

Comme $1+t>0$ sur $[0;1]$, il vient: $0\leqslant\frac{t^{n+1}}{1+t}\leqslant\frac{t^n}{1+t}$

On a donc: $0\leqslant\frac{2t^{n+1}}{1+t}\leqslant\frac{2t^n}{1+t}$

D'après la positivité de l'intégrale: $0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$ ce qui prouve que la suite (u_n) est décroissante.

c) D'autre part, $0\leqslant t\leqslant 1$ implique $1\leqslant t+1\leqslant 2$, puis, $\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{1+t}\leqslant 1$

en multipliant la double inégalité par t^n qui est positif, on a: $0\leqslant\frac{t^n}{1+t}\leqslant t^n$

d) Il s'en suit: $0\leqslant\frac{2t^n}{1+t}\leqslant 2t^n$ et d'après la positivité de l'intégrale: $0\leqslant u_n\leqslant\int_0^1 2t^n\,dt$

Or, $\int_0^1 2t^n\,dt=\left[\frac{2}{n+1}t^{n+1}\right]_0^1=\frac{2}{n+1}$ d'où, $0\leqslant u_n\leqslant\frac{2}{n+1}$

e) Comme $\frac{2}{n+1}$ converge vers 0, la suite (u_n) converge vers 0 (théorème des gendarmes) et d'après 3a) la suite (I_n) converge vers $\frac{1}{2}$