Index

[Exercice 1......1]
[Exercice 2......3]
[Exercice 3......5]
[Exercice 4......8]

Exercice 1

Exercice 1 (4 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives : $A(1,-2,4)$ $B(-2,-6,5)$ $C(-4,0,-3)$.

1. a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   b) Démontrer que le vecteur $\vec{n}(1,-1,-1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   c) Déterminer une équation du plan (ABC).

2. a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par le point O et orthogonale au plan (ABC).
   b) Déterminer les coordonnées du point O', projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

3. On désigne par H le projeté orthogonal du point O sur la droite (BC).
   Soit t le réel tel que $\overrightarrow{BH} = t\overrightarrow{BC}$.
   a) Démontrer que $t = \dfrac{\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2}$.
   b) En déduire le réel t et les coordonnées du point H.

Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a: $A(1; –2; 4)$, $B(–2; –6; 5)$ et $C(–4; 0; –3)$

1 a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\2\\-7\end{pmatrix}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc, les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = –3 + 4 – 1 = 0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = –5 – 2 + 7 = 0$, d'où, $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ et $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$.

Les points A, B, C n'étant pas alignés forment un plan, et,

comme $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), $\vec{n}$ est un vecteur normal de ce plan.

c) Un point $M(x; y; z) \in (ABC)$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

Un point $M(x; y; z) \in (ABC)$ si et seulement si $(x - 1)\times 1 + (y + 2)\times (-1) + (z - 4)\times(-1) = 0$

Une équation du plan (ABC) est: $x - y - z + 1 = 0$

2a) Un point $M(x; y ; z) \in \Delta$ droite passant par O dirigée par $\vec{n}$ si et seulement si , il existe un réel t tel que $\overrightarrow{OM} = t\ \vec{n}$.

On a donc: $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

b) Le point O' est défini par $O' \in (OM) \cap (P)$, d'où, les coordonnées de O' sont solutions du système:

$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -t \\ x - y - z + 1 = 0 \end{cases}$, soit, $3\ t = -1$.

Le point O' a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$

3) H est le point appartenant à (BC) tel que $(OH) \perp (BC)$

On pose : $\overrightarrow{BH} = t\ \overrightarrow{BC}$

a) $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{HO}) \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC}$, car, $\overrightarrow{HO} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ (vecteurs orthogonaux).

Comme $\overrightarrow{BH} = t\ \overrightarrow{BC}$, on a: $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC} = t\ \overrightarrow{BC}^{\,2} = t\ \|\overrightarrow{BC}\|^2$

Conclusion: $t = \dfrac{\overrightarrow{BO} . \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|^2}$

b) Comme $\overrightarrow{BO} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC} = -4 + 36 + 40 = 72$

$\|\overrightarrow{BC}\|^2 = 4 + 36 + 64 = 104$

$t = \dfrac{72}{104} = \dfrac{9}{13}$.

Puisque $\overrightarrow{BH} = t\ \overrightarrow{BC}$, $\begin{cases} x_H = t\, x_{\overrightarrow{BC}} + x_B \\ y_H = t\, y_{\overrightarrow{BC}} + y_B \\ z_H = t\, z_{\overrightarrow{BC}} + z_B \end{cases}$

$x_H = \dfrac{9}{13} \times(-2) + (-2) = -\dfrac{44}{13}$;

$y_H = \dfrac{9}{13} \times 6 + (-6) = -\dfrac{24}{13}$;

$z_H = \dfrac{9}{13} \times(-8) + 5 = -\dfrac{7}{13}$

Exercice 2

Exercice 2 (3 points)

Une urne contient des boules indiscernables au toucher.

20 % des boules portent le numéro 1 et sont rouges.

Les autres portent le numéro 2 et parmi elles, 10 % sont rouges et les autres sont vertes.

1. On tire une boule au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?

2. On a tiré une boule au hasard. Elle est rouge.

   Montrer que la probabilité qu'elle porte le numéro 2 est égale à $\frac{2}{7}$.

3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise (après chaque tirage la boule est remise dans l'urne).

   a) Exprimer en fonction de n la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages.

   b) Déterminer l'entier n à partir duquel la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages est supérieure ou égale à 0,99.

Analyse de l'énoncé: répartition des boules.

	Numéro 1	**Numéro 2**	**Total**
Rouge	20	8	28
Verte	0	72	72
Total	20	80	100

1) Toutes les boules portant le numéro 1 sont rouges et $\frac{10}{100}$ des $\frac{80}{100}$ des boules portant le numéro 2 sont rouges.

La proportion des boules rouges est donc: $\frac{20}{100} + \frac{10}{100} \times \frac{80}{100} = \frac{28}{100}$.

Les boules étant indiscernables au toucher, et, le tirage au hasard, la probabilité de tirer une boule rouge est P(Rouge) = $\frac{28}{100}$ = 0,28.

2) Sachant que la boule tirée est rouge, on cherche la probabilité que cette boule porte le numéro 2.

$P_R(N°2) = \frac{P(N°2 \cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}08}{0{,}28} = \frac{8}{28} = \frac{2}{7}$

3) $n \geqslant 2$

a) Soit S " la boule porte le N° 1 et est rouge ". P(S) = 0,2

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de boules rouges portant le N°1 en n tirages successifs et sans remise.

X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n;\ 0{,}2)$ de paramètres n et 0,2.

On cherche $P(X \geqslant 1)$.

$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}8^n$

b) $P(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}99$ si et seulement si $1 - 0{,}8^n \geqslant 0{,}99$

$P(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}99$ si et seulement si $0{,}8^n \leqslant 0{,}01$ ln strictement croissante sur $]0; +\infty[$

$P(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}99$ si et seulement si $n \ln 0{,}8 \leqslant \ln 0{,}01$ $0{,}8 < 1$ d'où $\ln 0{,}8 < 0$

$P(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}99$ si et seulement si $n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8}$

Une valeur approchée de $\dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8}$ est 20,6.

Si $n \geqslant 21$ alors $P(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}99$

Exercice 3

Exercice 3 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

On réalisera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

On considère les points A d'affixe i, B d'affixe −2i et D d'affixe 1.

On appelle E le point tel que le triangle ADE soit équilatéral direct.

Soit f l'application qui à tout point M d'affixe z ($z \neq \mathrm{i}$) associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{2z - \mathrm{i}}{\mathrm{i}z + 1}.$$

1. Démontrer que le point E a pour affixe $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+\mathrm{i})$.

2. Exprimer sous forme algébrique l'affixe du point D' associé au point D par l'application f.

3. a) Démontrer que, pour tout nombre complexe z différent de i, $(z'+2\mathrm{i})(z-\mathrm{i}) = 1$.

   b) En déduire que pour tout point M d'affixe z ($z \neq \mathrm{i}$) :

   $\mathrm{BM}' \times \mathrm{AM} = 1$

   et $\left(\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{BM}'}\right) = -\left(\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right) + k\times 2\pi$ où k est un entier relatif.

4. a) Démontrer que les points D et E appartiennent au cercle (C) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

   b) En utilisant les résultats de la question 3b), placer le point E' associé au point E par l'application f. On laissera apparents les traits de construction.

5. Quelle est la nature du triangle BD'E' ?

E tel que *ADE* est un triangle équilatéral direct.

À tout point *M* d'affixe z ($z \neq \mathrm{i}$), on associe le point *M'* d'affixe z' définie par $z' = f(z) = \dfrac{2z-\mathrm{i}}{iz+1}$.

1) Pour construire *E* construire les cercles de centre *A* et de rayon [*AD*] et de centre *D* et de rayon [*DA*]. Le point *E* est le point d'intersection de ces deux cercles tel que *ADE* est direct.

Puisque *ADE* est un triangle équilatéral direct, le point *E* est l'image du point *D* par la rotation de centre *A* et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$, d'où,

$z_E - z_A = e^{\mathrm{i}\,\pi/3}\,(z_D - z_A)$

$z_E = \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1-\mathrm{i}) + \mathrm{i} = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \mathrm{i}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + \mathrm{i})$$

2) Le point D' a pour affixe $z_{D'} = f(z_D) = \dfrac{2-\mathrm{i}}{\mathrm{i}+1} = \dfrac{(2-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}\mathrm{i}$

(On peut ainsi placer D')

3a) $(z' + 2\mathrm{i})(z - \mathrm{i}) = \left(\dfrac{2z-\mathrm{i}}{\mathrm{i}z+1} + 2\mathrm{i}\right)(z - \mathrm{i}) = \dfrac{(2z-\mathrm{i}-2z+2\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}{\mathrm{i}z+1} = \dfrac{\mathrm{i}(z-\mathrm{i})}{\mathrm{i}z+1} = \dfrac{\mathrm{i}z+1}{\mathrm{i}z+1} = 1$

b) L'affixe de $\overrightarrow{BM'}$ est $z' - (-2\mathrm{i}) = z' + 2\mathrm{i}$.

On a donc: $BM' = |z'+2\mathrm{i}|$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{BM'}) = \arg(z' + 2\mathrm{i})\ [2\pi]$

L'affixe de $\overrightarrow{AM}$ est $z - \mathrm{i}$

On a donc: $AM = |z-\mathrm{i}|$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = \arg(z - \mathrm{i})\ [2\pi]$

Pour tout $z \neq \mathrm{i}$ (Remarquer: nécessairement $z' \neq -2\mathrm{i}$, car, $z' = -2\mathrm{i}$ n'a pas de solution)

L'égalité $(z' + 2\mathrm{i})(z - \mathrm{i}) = 1$ équivaut à $\begin{cases} |(z'+2\mathrm{i})(z-\mathrm{i})| = 1 \\ \arg((z'+2\mathrm{i})(z-\mathrm{i})) = 0\ [2\pi] \end{cases}$

Or, le module d'un produit est le produit des modules et
un argument de produit est la somme des arguments.

On a donc: $|z'+2\mathrm{i}| \times |z-\mathrm{i}| = 1$, soit, $BM' \times AM = 1$

et $\arg(z' + 2\mathrm{i}) + \arg(z - \mathrm{i}) = 0\ [2\pi]$, soit: $(\vec{u}, \overrightarrow{BM'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{AM})\ [2\pi]$

4 a) On a: $AD = |z_D - z_A| = |1-\mathrm{i}| = \sqrt{2} = AE$ (triangle ADE équilatéral),

d'où, D et E sont sur le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

b) D'après la question 3/ $(\vec{u}, \overrightarrow{BE'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{AE})$

Le point E' est sur la demi-droite $[Bx)$ tel que l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{Bx})$ est l'opposé de l'angle $-(\vec{u}, \overrightarrow{AE})$

$BE' \times AE = 1$ et

d'autre part, le point D' vérifie $BD' \times AD = 1$, comme $AD = AE$, on en déduit, $BE' = BD'$.

Voir figure pour le report des arcs ...

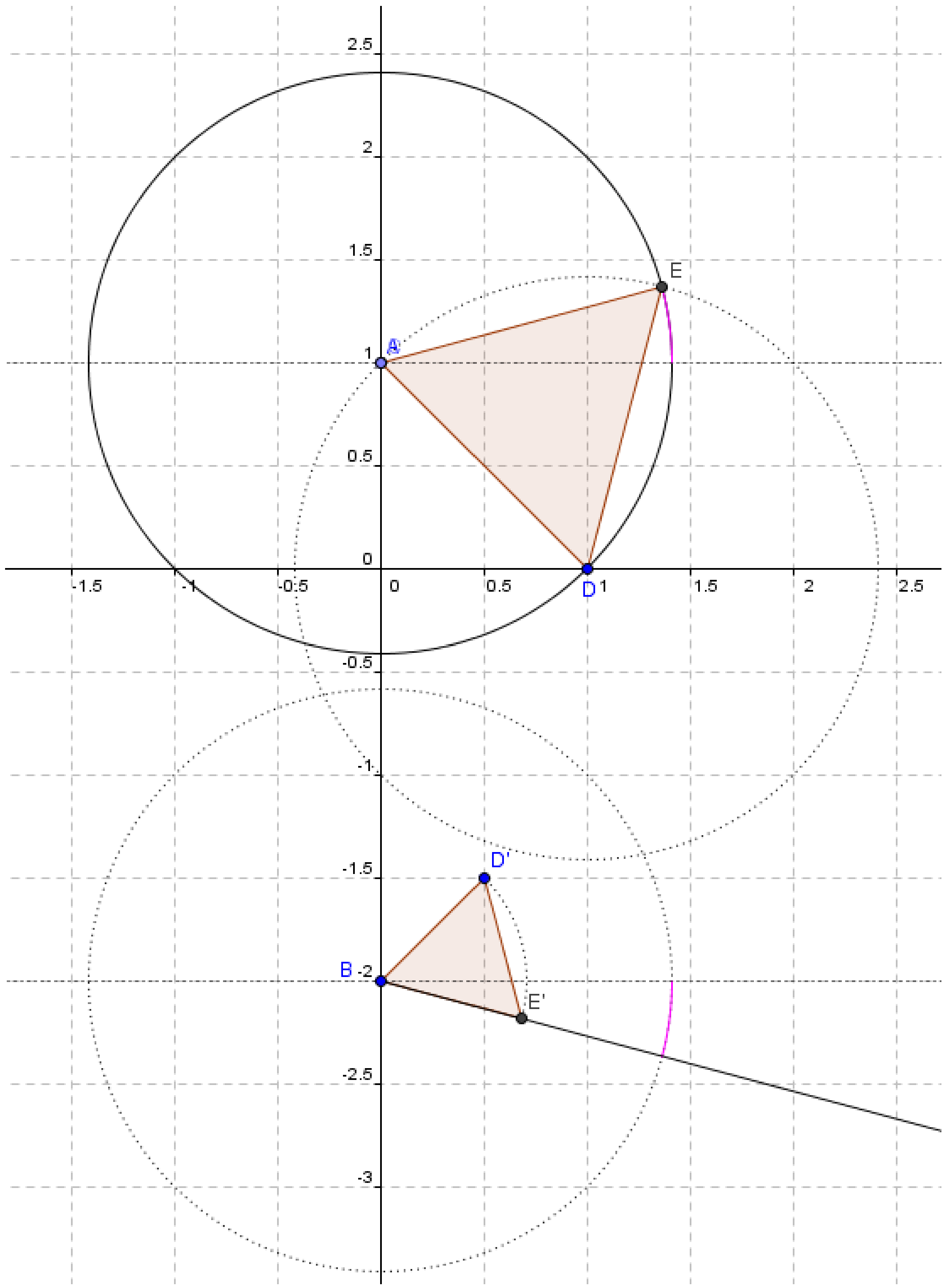
5) Comme $BD' = BE'$, le triangle $BD'E'$ est isocèle.

D'autre part, $(\vec{u}, \overrightarrow{BE'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{AE})$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{BD'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{AD})$

Par différence membre-à-membre, on obtient l'égalité, $(\vec{u}, \overrightarrow{BE'}) - (\vec{u}, \overrightarrow{BD'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{AE}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AD})$

Soit, d'après la relation de Chasles, $(\overrightarrow{BD'}, \overrightarrow{BE'}) = -(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}) = -\dfrac{\pi}{3}$.

Le triangle $BD'E'$ est donc équilatéral indirect.



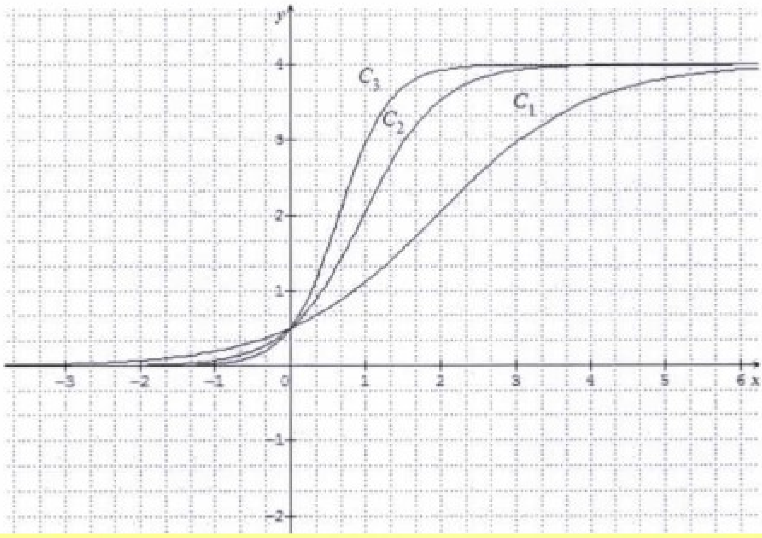
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
A
D
E
B
D'
E'

Exercice 4

ANNEXE

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Exercice 4



Exercice 4 (8 points)

À tout entier naturel n non nul, on associe la fonction f_n définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{4e^{nx}}{e^{nx}+7}.$$

On désigne par C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Les courbes C_1, C_2 et C_3 sont données en annexe page 6.

Partie A : Étude de la fonction f_1 définie sur $\mathbf{R}$ par $f_1(x) = \dfrac{4e^{x}}{e^{x}+7}$.

1. Vérifier que pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{4}{1+7e^{-x}}$.
2. a) Démontrer que la courbe C_1 admet deux asymptotes dont on précisera des équations.

   b) Démontrer que la fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

   c) Démontrer que pour tout réel x, $0 < f_1(x) < 4$.
3. a) Démontrer que le point I_1 de coordonnées $(\ln 7, 2)$ est un centre de symétrie de la courbe C_1.

   b) Déterminer une équation de la tangente (T_1) à la courbe C_1 au point I_1.

   c) Tracer la droite (T_1).
4. a) Déterminer une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbf{R}$.

   b) Calculer la valeur moyenne de f_1 sur l'intervalle $[0, \ln 7]$.

Partie B : Étude de certaines propriétés de la fonction f_n.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul le point A $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe C_n.

2. a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul la courbe C_n et la droite d'équation $y = 2$ ont un unique point d'intersection dont on précisera l'abscisse.

   On note I_n ce point d'intersection.

   b) Déterminer une équation de la tangente (T_n) à la courbe C_n au point I_n.

   c) Tracer les droites (T_2) et (T_3).

3. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \frac{n}{\ln 7}\int_0^{\frac{\ln 7}{n}} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

   Montrer que la suite (u_n) est constante.

Partie A

1) $f_1(x) = \frac{4\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+7}$; En multipliant numérateur et dénominateur par e^{-x}, il vient $f_1(x) = \frac{4}{1+7\,\mathrm{e}^{-x}}$

2) a) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x = 0$, on a: $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x} = 0$

D'où, $\lim\limits_{x\to+\infty}(1 + 7\mathrm{e}^{-x}) = 1$, puis, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 4$

La droite d'équation $y = 4$ est asymptote à $\mathscr{C}_1$ en $+\infty$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x = +\infty$, on a: $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x} = +\infty$

D'où, $\lim\limits_{x\to-\infty}(1 + 7\mathrm{e}^{-x}) = +\infty$, puis, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = 0$

La droite d'équation $y = 0$ (axe des abscisses) est asymptote à $\mathscr{C}_1$ en $-\infty$.

2 b) f_1 est le quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, d'où, $f_1'(x) = \frac{4\,\mathrm{e}^x(e^x+7)-\mathrm{e}^x\times 4\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+7)^2} = \frac{28\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+7)^2}$

Comme pour tout x réel, $\mathrm{e}^x > 0$, la dérivée est strictement positive et la fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2 c) f_1 étant strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$, on a: $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) < f_1(x) < \lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)$

D'où, $0 < f_1(x) < 4$

On peut aussi faire:

Pour tout réel, $\mathrm{e}^X > 0$, d'où, $\mathrm{e}^{-x} > 0$.

On a donc: $1 + 7\mathrm{e}^{-x} > 1$, et, en appliquant la fonction inverse strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ et à valeurs dans $]0; +\infty[$, on obtient:

$0 < \dfrac{1}{1+7e^{-x}} < 1$, puis, en multipliant par 4 strictement positif,

$0 < \dfrac{4}{1+7e^{-x}} < 4$

3 a) Soit I_1 (ln 7; 2)

On peut remarquer que I_1 est un point de $\mathscr{C}_1$, en effet, $e^{\ln 7} = 7$, d'où, $f_1(\ln 7) = \dfrac{4\times 7}{7+7} = 2$

Soit h un réel, évaluons $f_1(\ln 7 + h) + f_1(\ln 7 - h)$

Comme $e^{\ln 7+h} = e^{\ln 7} \times e^h = 7e^h$ et $e^{\ln 7-h} = e^{\ln 7} \times e^{-h} = 7e^{-h}$, on a:

$f_1(\ln 7 + h) + f_1(\ln 7 - h) = \dfrac{28e^h}{7(e^h+1)} + \dfrac{28e^{-h}}{7(e^{-h}+1)} = 4\ \dfrac{e^h(e^{-h}+1)+e^{-h}(e^h+1)}{(e^h+1)(e^{-h}+1)} = 4\ \dfrac{2+e^h+e^{-h}}{2+e^h+e^{-h}} = 4 = 2\times 2$

Ce qui prouve que le point I_1 est centre de symétrie de $\mathscr{C}_1$.

3b) Une équation de T_1 tangente à $\mathscr{C}_1$ en I_1 est donnée par:

$y = f_1'(\ln 7)(x - \ln 7) + f_1(\ln 7)$

Or, $f_1'(\ln 7) = \dfrac{28\times 7}{(7+7)^2} = 1$, d'où, une équation de T_1 est: $y = x - \ln 7 + 2$

3c) Tracé de T_1

Au point d'ordonnée 2 de $\mathscr{C}_1$, tracer la droite de pente 1 (diagonale du quadrillage dans un repère orthonormal)

4) a) On pose $u(x) = e^x + 7$, d'où, $u'(x) = e^x$.

f_1 est donc de la forme $4\ \dfrac{u'}{u}$ avec $u > 0$.

Une primitive de f_1 est donc $F_1: x \mapsto 4\times \ln(e^x + 7)$

4 b) La valeur moyenne de f_1 sur [0; ln 7] est le nombre $\mu = \dfrac{1}{\ln 7} \displaystyle\int_0^{\ln 7} f_1(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\ln 7}\ \left[4\times\ln(e^x+7)\right]_0^{\ln 7}$

$\mu = \dfrac{4}{\ln 7}(\ln 14 - \ln 8) = \dfrac{4}{\ln 7}\times\ln\ \dfrac{7}{4}$.

Partie B:

1) Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0) = \dfrac{4e^0}{e^0+7} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$, le point A de coordonnées (0; $\dfrac{1}{2}$) est un point de $\mathscr{C}_n$

2 a), Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_n$ et de la droite d'équation $y = 2$ sont les solutions de l'équation: $\dfrac{4e^{nx}}{e^{nx}+7} = 2$ qui est équivalente à: $2e^{nx} = 14$, soit $e^{nx} = 7$

En appliquant la fonction ln , bijection réciproque de l'exponentielle, on obtient, l'unique solution $x = \dfrac{\ln 7}{n}$

Le point $I_n(\dfrac{\ln 7}{n}$; 2) est l'unique point d'intersection de $\mathscr{C}_n$ et de la droite d'équation $y = 2$

b) Une équation de T_n tangente à $\mathscr{C}_n$ en I_n est donnée par:

$y = f_n'\left(\frac{\ln 7}{n}\right)\left(x - \frac{\ln 7}{n}\right) + 2$

Calcul de $f_n'(x) = \dfrac{4ne^{nx}(e^{nx}+7) - ne^{nx}\times 4e^{nx}}{(e^{nx}+7)^2} = \dfrac{28ne^{nx}}{(e^{nx}+7)^2}$

Or, $f_n'\left(\frac{\ln 7}{n}\right) = \dfrac{28n\times 7}{(7+7)^2} = n$, d'où, une équation de T_n est: $y = nx - \ln 7 + 2$

2c) Tracé de T_2 et T_3

Au point d'ordonnée 2 des courbes $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$, tracer les droites de pente 2 et de pente 3

3) Soit $u_n = \dfrac{n}{\ln 7}\displaystyle\int_0^{\frac{\ln 7}{n}} f_n(x)\,dx$

Une primitive de f_n est la fonction $F_n : x \mapsto \dfrac{4}{n}\ln(e^{nx} + 7)$

(Même démarche que pour f_1 en remarquant que la dérivée de la fonction $u(x) = e^{nx} + 7$ est $u'(x) = n\,e^{nx}$)

$u_n = \dfrac{n}{\ln 7} \times \dfrac{4}{n}(\ln 14 - \ln 8) = \dfrac{4}{\ln 7}(\ln 14 - \ln 8) = \dfrac{4}{\ln 7}\times \ln\dfrac{7}{4} = \mu$ (valeur moyenne de f_1 sur $[0; \ln 7]$.

La valeur moyenne des fonctions f_n sur l'intervalle $\left[0; \frac{\ln 7}{n}\right]$ ne dépend pas de n.