Index

Exercice 1 5 points

Dans cet exercice on étudie une épidémie dans une population.

Partie A : Étude de la progression de l'épidémie pendant 30 jours

Au début de l'épidémie on constate que 0,01 de la population est contaminé. Pour t appartenant à [0 ; 30], on note y(t) le pourcentage de personnes touchées par la maladie après t jours.
On a donc y(0) = 0,01. On admet que la fonction y ainsi définie sur [0 ; 30] est dérivable, strictement positive et vérifie : y' = 0,05y(10 – y)

1. On considère la fonction z définie sur l'intervalle [0 ; 30] par $z = \frac{1}{y}$.

Démontrer que la fonction y satisfait aux conditions $\begin{cases} y(0)=0{,}01 \\ y'=0{,}05\,y(10-y) \end{cases}$ *si et seulement si la fonction z satisfait aux conditions* $\begin{cases} z(0)=100 \\ z'=-0{,}5\,z+0{,}05 \end{cases}$

Sens direct:

On sait d'après l'énoncé $y > 0$.

Soit y vérifiant $\begin{cases} y(0)=0{,}01 \\ y'=0{,}05\,y(10-y) \end{cases}$

$z = \frac{1}{y}$ d''où, $z' = \frac{-y'}{y^2}$. On en déduit: $y' = -y^2 z' = -\frac{z'}{z^2}$

On a alors: $z(0) = \frac{1}{y(0)} = 100$ et $-\frac{z'}{z^2} = 0{,}05\,\frac{1}{z}\,(10 - \frac{1}{z}) = 0{,}05\,\frac{1}{z^2}\,(10z-1)$

En multipliant les deux membres de l'égalité par z^2, il vient: $-z' = 0{,}05\,(10z-1) = 0{,}5z - 0{,}05$

La fonction z vérifie bien: $\begin{cases} z(0)=100 \\ z'=-0{,}5\,z+0{,}05 \end{cases}$.

Sens réciproque:

Soit z vérifiant $\begin{cases} z(0)=100 \\ z'=-0{,}5\,z+0{,}05 \end{cases}$

On a alors $y(0) = \frac{1}{z(0)} = 0{,}01$ et $\frac{-y'}{y^2} = -0{,}5\,\frac{1}{y} + 0{,}05$.

En multipliant les deux membres de l'égalité par y^2, il vient: $-y' = -0{,}5y + 0{,}05y^2 = 0{,}05y(-10+y)$

La fonction y vérifie bien: $\begin{cases} y(0)=0{,}01 \\ y'=0{,}05\,y(10-y) \end{cases}$

L'équivalence est démontrée.

2. a. En déduire une expression de la fonction z puis celle de la fonction y.

La fonction z vérifie une équation différentielle de la forme $z' = az + b$.

Les solutions sont donc les fonctions $z(t) = C\ \mathrm{e}^{-0,5t} - \dfrac{0,05}{-0,5} = C\ \mathrm{e}^{-0,5t} + 0,1$.

Comme $z(0) = 100$, on a: $100 = C\ \mathrm{e}^{0} + 0,1$, d'où, $C = 100 - 0,1 = 99,9$.

$z(t) = 99,9\ \mathrm{e}^{-0,5t} + 0,1$

$y(t) = \dfrac{1}{z(t)} = \dfrac{1}{99,9\,\mathrm{e}^{-0,5t}+0,1}$

b. Calculer le pourcentage de la population infectée après 30 jours. On donnera la valeur arrondie à l'entier le plus proche.

Le pourcentage de la population infectée après 30 jours est la valeur $y(30) = \dfrac{1}{99,9\times\mathrm{e}^{-0,5\times30}+0,1}$

Une valeur approchée donnée par la calculatrice est 9,996 ...

L'entier le plus proche est 10.

10 % de la population est touchée par la maladie après 30 jours.

Partie B : Étude sur l'efficacité d'un vaccin

Dans cette partie, toute trace de recherche,même incomplète, ou d'initiative,même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Le quart de la population est vacciné contre cette maladie contagieuse. De plus, on estime que sur la population vaccinée, 92 % des individus ne tombent pas malades. Sur la population totale, on estime aussi que 10 % des individus sont malades.

On choisit au hasard un individu dans cette population.

On note M "être malade" et "V "être vacciné"

(Faire un arbre et penser à la partition des individus Malades en deux groupes: Malades et Vaccinés, Malades et non Vaccinés)

1. Montrer que la probabilité de l'évènement « l'individu n'est pas vacciné et tombe malade » est égale à 0,08.

On cherche donc: $P(M \cap \overline{V})$

On sait: $P(M) = 0,1$ et $P(M \cap V) = 0,25\times(1 - 0,92) = 0,25\times 0,08 = 0,02$

Or, $M = (M \cap V) \cup (M \cap \overline{V})$, avec, $(M \cap V) \cap (M \cap \overline{V}) = \varnothing$ (Partition)

$P(M \cap \overline{V}) = 0,1 - 0,02 = 0,08$

2. Quelle est la probabilité de tomber malade pour un individu qui n'est pas vacciné ?

On cherche $P_{\overline{V}}(\mathrm{M}) = \dfrac{P(M\cap\overline{V})}{P(\overline{V})} = \dfrac{0,08}{0,75} = \dfrac{8}{75}$

EXERCICE 2 5 points

Partie A : Restitution organisée de connaissances

On supposera connus les résultats suivants :

Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle [a ; b] avec a < b.

• *Si u ⩾ 0 sur [a ; b] alors* $\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$

• *Pour tous réels α et β,* $\int_a^b [\alpha u(x)+\beta v(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle [a ; b] avec a < b

et si, pour tout x de [a ; b], f (x) ⩽ g(x) alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Pour tout x de $[a ; b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ si et seulement si pour tout x de $[a ; b]$, $g(x) - f(x) \geqslant 0$.

D'après le premier prérequis, on a alors:

$\int_a^b (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

D'après le second prérequis, il s'en déduit: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$, ce qui prouve le résultat demandé.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 1] par f (x) = e^{-x^2}

$$\begin{cases} u_0 = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ \text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n = \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \end{cases}$$

1. a. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1], $\frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

Soit $0 \leqslant x \leqslant 1$, on a alors successivement:

$0 \leqslant x^2 \leqslant 1$

$0 \geqslant -x^2 \geqslant -1$, et, comme la fonction exp est croissante sur ℝ, on obtient:

$\mathrm{e}^0 \geqslant \mathrm{e}^{-x^2} \geqslant \mathrm{e}^{-1}$, soit: $\frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

b. En déduire que $\frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant u_0 \leqslant 1$.

Comme l'intégration conserve l'ordre (voir Partie A/), on a:

$\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 1\,\mathrm{d}x$

Soit: $\frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant u_0 \leqslant 1$

2. Calculer u_1 .

$u_1 = \int_0^1 xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

Comme la dérivée de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est la fonction $x \mapsto -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$,

une primitive de la fonction $x \mapsto x\,\mathrm{e}^{-x^2}$ est la fonction $x \mapsto -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2}$

On a alors: $u_1 = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-1} - (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\,(1 - \frac{1}{\mathrm{e}})$

3. a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n$.

On a montré $\frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant u_0$

Pour tout réel X, $\mathrm{e}^X > 0$, d'où, sur [0; 1], le produit $x^n\,\mathrm{e}^{-x^2}$ est positif ou nul, pour tout entier naturel n non nul.

D'après le prérequis 1/, on a donc: $\int_0^1 x^n e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Par conséquent: pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n$.

b. Étudier les variations de la suite (u_n).

Étudions le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$

$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 x^{n+1}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^n e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n e^{-x^2}(x-1)\,\mathrm{d}x$

Or, $0 \leqslant x \leqslant 1$, donc, $x - 1 \leqslant 0$ et, le produit $x^n\,\mathrm{e}^{-x^2}(x-1)$ est négatif ou nul, d'où, $\int_0^1 x^n e^{-x^2}(x-1)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$.

La suite (u_n) est donc décroissante.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc la suite (u_n) est convergente.

4. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.

On sait au 1a) $\frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant f(x) \leqslant 1$

En multipliant par x^n qui est positif, on a:

$\frac{1}{\mathrm{e}}\,x^n \leqslant x^n f(x) \leqslant x^n$

Par intégration entre 0 et 1, il vient:

$\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}}x^n\,\mathrm{d}x \leqslant u_n \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$.

$$\frac{1}{\mathrm{e}}\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 \leqslant u_n \leqslant \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1$$

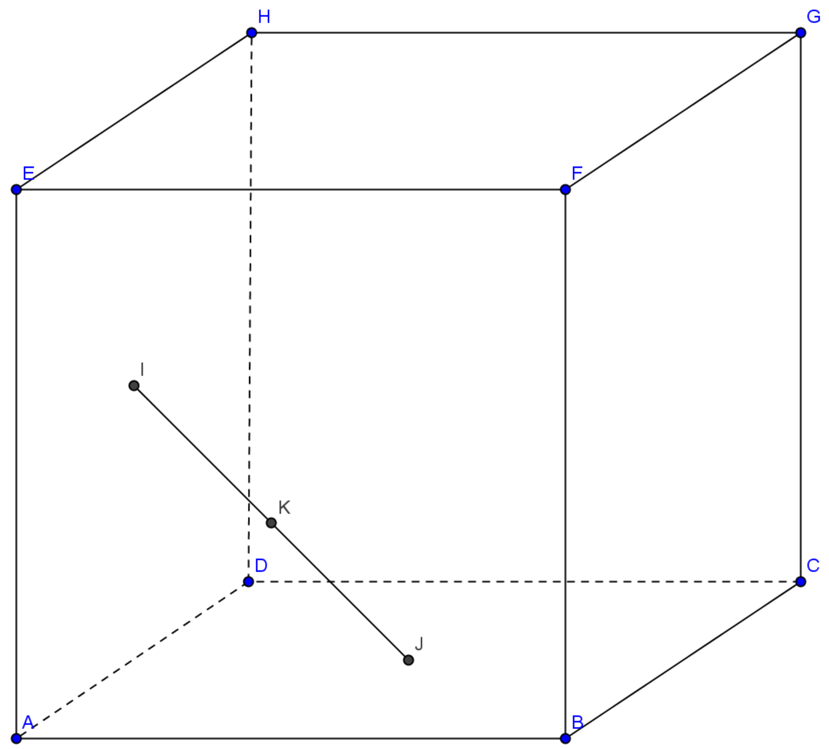
$$\frac{1}{\mathrm{e}} \times \frac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

b. En déduire la limite de la suite (u_n).

Comme $\frac{1}{n+1}$ converge vers 0, le théorème des gendarmes permet de conclure que (u_n) converge vers 0.

Exercice 3 5 points

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.



On note I le centre de la face ADHE, J celui de la face ABCD et K le milieu du segment [IJ].

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AD}},\overrightarrow{\mathrm{AE}})$.

1. Déterminer les coordonnées des points I, J et K dans ce repère.

$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$, d'où, $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ $\qquad I(0;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2})$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, d'où, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ $\qquad J(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 0)$

Et comme K est le milieu de $[IJ]$, $K(\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{4})$

2. Démontrer que les points A, K et G ne sont pas alignés.

Comme $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$,

il n'existe pas de réel α tel que $\alpha\ \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AK}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AK}$ n'étant pas colinéaires, les points A, K, G ne sont pas alignés.

On peut donc considérer le plan (AKG).

3. a. Démontrer que le plan médiateur du segment [IJ] est le plan (AKG).

$AI = AJ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (le côté du cube valant 1, la diagonale d'une face vaut $\sqrt{2}$)

$KI = KJ$ car K est le milieu de [IJ]

Comme $\overrightarrow{GI}\begin{pmatrix} 0-1 \\ \frac{1}{2}-1 \\ \frac{1}{2}-1 \end{pmatrix}$, $GI^2 = (-1)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$

et $\overrightarrow{GJ}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-1 \\ \frac{1}{2}-1 \\ 0-1 \end{pmatrix}$, $GJ^2 = ... = \frac{3}{2}$.

On a donc : $GI = GJ$

Les points A, K, G sont équidistants de I et J, ce sont donc des points du plan médiateur de [IJ]

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (AKG).

Le vecteur $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ est donc un vecteur normal du plan (AKG) et par conséquent, $M \in (AKG)$ si et

seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{IJ} = 0$ Comme $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a: $\frac{1}{2}x + 0y - \frac{1}{2}z = 0$

$x - z = 0$ est une équation de (AKG)

Remarque: on peut contrôler que les cordonnées des points A, K, G vérifient l'équation

c. Vérifier que le point D appartient au plan (AKG).

Le point $D(0;\ 1;\ 0)$ a ses coordonnées qui vérifient l'équation du plan (AKG)

4. Dans cette question, on veut exprimer K comme barycentre des points A, D et G.

Soit L le centre du carré DCGH.

a. Démontrer que le point K est le milieu du segment [AL].

Dans le triangle *DBG*, *J* et *L* étant les milieux des côtés [*DB*] et [*DG*], on sait d'après Thalès, $\overrightarrow{JL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$

Or, $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$ et, comme $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BG}$, il vient l'égalité: $\overrightarrow{JL} = \overrightarrow{AI}$.

Le quadrilatère *AILJ* est un parallélogramme. Ses diagonales [*IJ*] et [*AL*] se coupent en leur milieu.

On peut aussi déterminer les coordonnées de L et on montre que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AL}$.

b. Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Démontrer que *K* est le barycentre des points *A*, *D* et *G* affectés de coefficients que l'on précisera.

L étant le milieu de [*DG*], on sait: $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AG})$.

D'autre part, on vient de montrer que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AL}$

$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AG})$.

On en déduit que *K* est le barycentre du système (*A*, 2), ((*D*, 1), (*G*, 1)

Autre méthode: Posons *a*, *b*, *c* les coefficients respectifs de *A*, *D*, *G*.

K est le barycentre de (*A*, *a*), (*D*, *b*), (*G*, *c*)

Comme *K* est le milieu de [*AL*], *K* est l'isobarycentre des points *A* et *L*.

Comme *L* est le milieu de [*DG*], *L* est l'isobarycentre des points *D* et *G*.

Par associativité, on doit donc avoir $b = c$ et *K* est le barycentre de (*A*, *a*), (*L*, 2*b*)

On doit avoir $a = 2b$.

On prend par exemple: $b = c = 1$ et $a = 2$

EXERCICE 4 5 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Soit A le point d'affixe $a = 1 + i\sqrt{3}$ *et B le point d'affixe* $b = 1 - \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})i$.

Partie A : étude d'un cas particulier

On considère la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

On note C le point d'affixe c image du point A par la rotation r et D le point d'affixe d image du point B par la rotation r .

La figure est donnée en annexe (figure 1).

1. a. Exprimer $\frac{-a}{b-a}$ sous forme algébrique.

$$\frac{-a}{b-a} = \frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+\mathrm{i}} = \frac{(-1-\mathrm{i}\sqrt{3})(-\sqrt{3}-\mathrm{i})}{4} = \mathrm{i}$$

b. En déduire que OAB est un triangle rectangle isocèle en A.

On en déduit que $0 - a = \mathrm{i}(b - a)$

Le point O d'affixe 0 est donc l'image de B d'affixe b dans la rotation de centre A d'affixe a et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Ce qui prouve que OAB est un triangle rectangle isocèle en A.

2. Démontrer que c =−2. On admet que d = −2 − 2i.

C le point d'affixe c image du point A par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, d'où,

$$c = \mathrm{e}^{i2\pi/3}\, a = \left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}) = \frac{1}{2}\left(-1 - (\sqrt{3})^2\right) = -2$$

D le point d'affixe d image du point B par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, d'où,

$$d = \mathrm{e}^{i2\pi/3}\, b = \left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1-\sqrt{3} + (1+\sqrt{3})\mathrm{i})$$

$$= \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3} - \sqrt{3} - 3) + \mathrm{i}(-1 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 3) = -2 - 2\mathrm{i}.$$

a. Montrer que la droite (AC) a pour équation y = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (x +2).

Une équation de la droite (AC) est donnée par:

$$y = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}(x - x_c) + y_c = \frac{-\sqrt{3}}{-2-1}(x - (-2) + 0) = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+2).$$

On peut aussi écrire:

Un point $M(x; y) \in (AC)$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-\sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -2-1 \\ 0-\sqrt{3}\end{pmatrix}$ sont colinéaires, d'où,

$-3(y - \sqrt{3}) = -\sqrt{3}(x - 1)$, d'où, ... $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$.

b. Démontrer que le milieu du segment [BD] appartient à la droite (AC).

L'affixe du milieu E de [BD] est $z_E = \frac{1}{2}(1-\sqrt{3} + (1+\sqrt{3})\mathrm{i} - 2 - 2\mathrm{i}) = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$

Comme $\frac{\sqrt{3}}{3}(x_E + 2) = \frac{\sqrt{3}}{3}(\frac{-1-\sqrt{3}}{2} + 2) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} = y_E$, le point E appartient à (AC).

Partie B : étude du cas général

Soit θ un réel appartenant à l'intervalle]0 2π[. On considère la rotation de centre O et d'angle θ.

On note A' le point d'affixe a' , image du point A par la rotation r , et B' le point d'affixe b', image du point B par la rotation r .

La figure est donnée en annexe (figure 2).

L'objectif est de démontrer que la droite (AA') coupe le segment [BB'] en son milieu.

1. Exprimer a' en fonction de a et θ et b' en fonction de b et θ.

$a' = e^{i\theta}\, a$ et $b' = e^{i\theta}\, b$.

2. Soit P le point d'affixe p milieu de [AA'] et Q le point d'affixe q milieu de [BB'].

a. Exprimer p en fonction de a et θ puis q en fonction de b et θ.

$p = \frac{1}{2}(a + a') = \frac{1}{2}(a + e^{i\theta}\, a) = \frac{1}{2}a(1 + e^{i\theta})$

$q = \frac{1}{2}(b + b') = \frac{1}{2}(b + e^{i\theta}\, b) = \frac{1}{2}b(1 + e^{i\theta})$

b. Démontrer que $\frac{-p}{q-p} = \frac{-a}{b-a}$.

Les calculs précédents donnent: $q - p = \frac{1}{2}(1 + e^{i\theta})(b - a)$

$\frac{-p}{q-p} = \frac{-a}{b-a}$ après réduction par $\frac{1}{2}(1 + e^{i\theta})$

c. En déduire que la droite (OP) est perpendiculaire à la droite (PQ).

Or, $\frac{-a}{b-a}$ = i (Voir Partie A/ 1a))

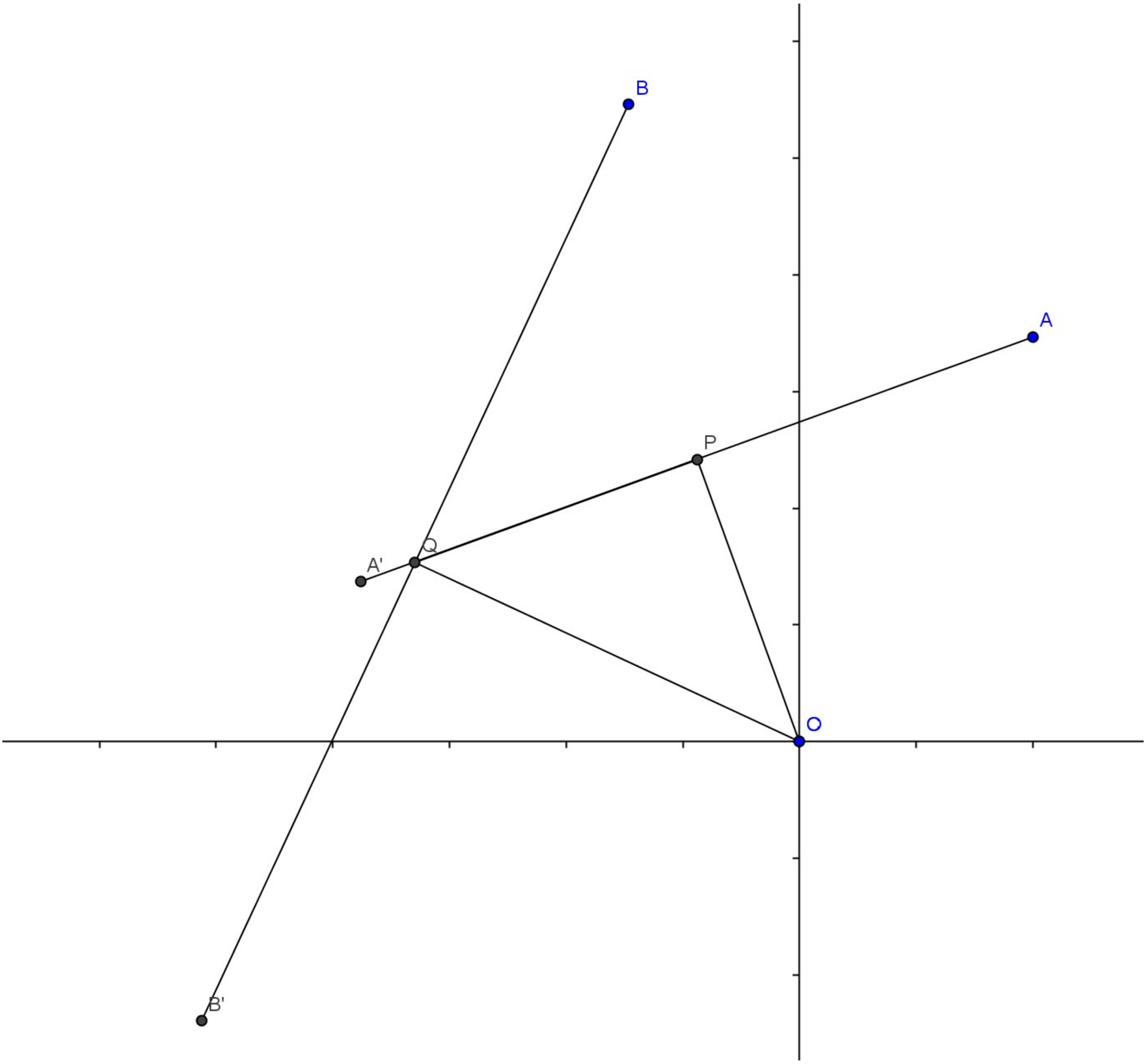
$\frac{-p}{q-p}$ = i prouve que (OP) est perpendiculaire à la droite (PQ), car, Q est l'image de O dans la rotation de centre P et d'angle $\frac{\pi}{2}$. (Voir Partie A/ 1b)

OQP est un triangle rectangle isocèle en P.

d. Démontrer que le point Q appartient à la droite (AA').

Or $OA = OA'$ (A' image de A par la rotation de centre O)et P milieu de [AA'] montre que (OP) est la médiatrice de [AA']. On en déduit $(OP) \perp (AA')$ en P.

Comme $(OP) \perp (PQ)$ en P, les droites (PQ) et (AA') sont confondues


B
A
P
Q
A'
O
B'

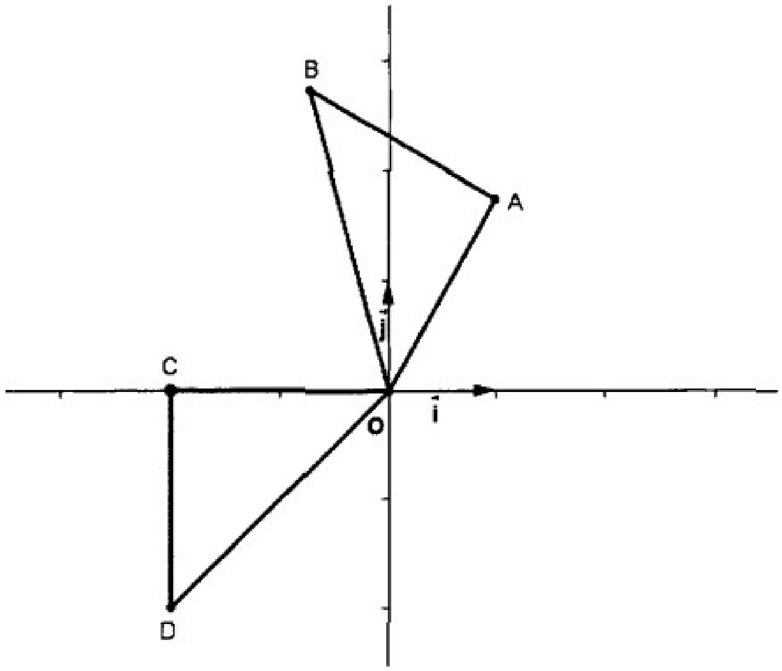
ANNEXE

Cette page ne sera pas à rendre avec la copie.

Exercice 4

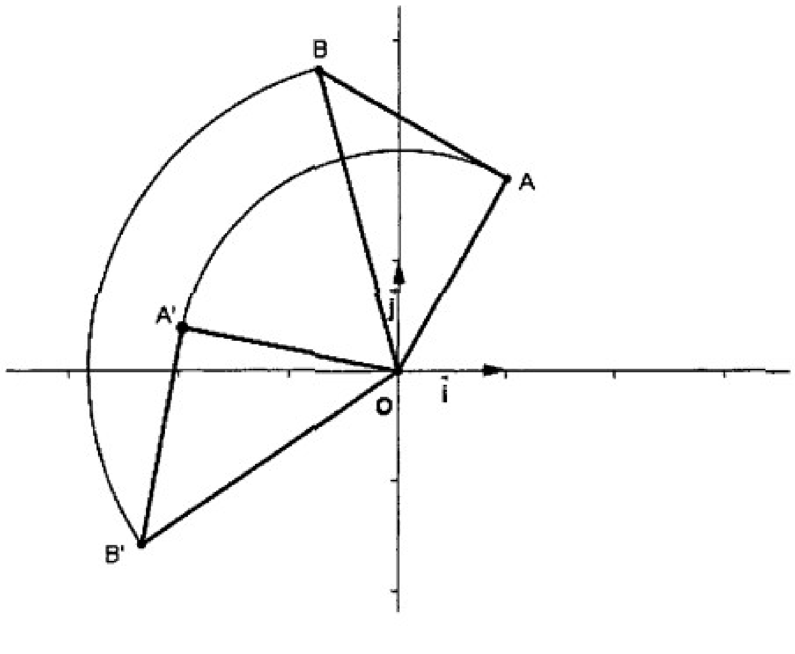
Partie A

Figure 1



Partie B

Figure 2



9MAOSAN1 **Page 6/6**