

Index

<u>EXERCICE 1</u>	5 points.....	1
<u>EXERCICE 2</u>	4 points.....	3
<u>EXERCICE 3</u>	5 points.....	5
<u>EXERCICE 4</u>	6 points.....	9
EXERCICE 1	5 points	

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives : $a = i$ et $b = 1 + i$.

On note : r_A la rotation de centre A, d'angle $\frac{\pi}{2}$, r_B la rotation de centre B, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r_O la rotation de centre O, d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Les réflexes à avoir en lisant l'énoncé:

Placer les points

Donner les écritures complexes de chaque rotation :

L'écriture complexe de la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ est : $z' - \omega = e^{i\theta} (z - \omega)$

se souvenir que $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ et $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$

écriture complexe de r_A : $z' - i = i(z - i)$

écriture complexe de r_B : $z' - (1 + i) = i(z - (1 + i))$

écriture complexe de r_O : $z' = -iz$

Partie A

On considère le point C d'affixe $c = 3i$. On appelle D l'image de C par r_A , G l'image de D par r_B et H l'image de C par r_O .

On note d , g et h les affixes respectives des points D, G et H.

1. Démontrer que $d = -2 + i$.

D'après l'écriture complexe de la rotation r_A ; $z' - i = i(z - i)$

on a : $d - i = i(3i - i) = -2$

$$d = -2 + i$$

2. Déterminer g et h .

D'après l'écriture complexe de la rotation r_B : $z' - (1 + i) = i(z - (1 + i))$

on a : $g - (1 + i) = i(-2 + i - (1 + i))$

$$g = -3i + 1 + i = 1 - 2i$$

et, d'après l'écriture complexe de la rotation r_O : $z' = -iz$

on a : $h = -i(3i) = 3$.

3. Démontrer que le quadrilatère CDGH est un rectangle.

Par exemple, on démontre que les diagonales [CG] et [DH] se coupent en leur milieu et sont de même longueur.

L'affixe du milieu de [CG] est $\frac{3i + 1 - 2i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

Celle du milieu de [DH] est : $\frac{-2+i+3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

$$CG = |g-c| = |1-5i| = \sqrt{26}$$

$$DH = |h-d| = |5-i| = \sqrt{26}$$

les diagonales [CG] et [DH] se coupent en leur milieu et sont de même longueur, donc, le quadrilatère CDGH est un rectangle.

Autre méthode :

On peut aussi faire : \overrightarrow{CD} d'affixe $d-c = -2-2i$ et \overrightarrow{HG} d'affixe $g-h = -2-2i$ donc CDGH est un parallélogramme et

$$(\overrightarrow{CH}, \overrightarrow{CD}) = \arg \frac{d-c}{h-c} = \arg \frac{-2-2i}{3-3i} = \arg \frac{-2}{3} \left(\frac{(1+i)^2}{2} \right) = \arg -\frac{2}{3}i = -\frac{\pi}{2} [2\pi].$$

(CH) \perp (CD).

Le parallélogramme CDGH est un rectangle

Partie B

On considère un point M, distinct de O et de A, d'affixe m . On appelle N l'image de M par r_A , P l'image de N par r_B et Q l'image de M par r_O .

On note n, p et q les affixes respectives des points N, P et Q.

1. Montrer que $n = im+1+i$. On admettra que $p = -m+1+i$ et $q = -im$.

En reprenant la démarche de la partie A/ :

Pour $m \neq 0$ et $m \neq a$,

1) $n - i = i(m - i) = im + 1$, d'où, $n = im+1+i$.

$p - (1 + i) = i(im+1+i - 1 - i) = -m$, d'où, $p = -m+1+i$.

$q = -i(m) = -im$.

2. Montrer que le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme.

L'affixe de \overrightarrow{MN} ($1 + im + i - m$) et celle de \overrightarrow{QP} ($-m + 1 + i + im$) sont égales, d'où, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

Le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme.

3. a. Montrer l'égalité : $\frac{m-n}{p-n} = i + \frac{1}{m}$.

$m \neq 0$ et $m \neq i$

$$\frac{m-n}{p-n} = \frac{m-1-im-i}{-m-im} = \frac{m(1-i)}{-m(1+i)} + \frac{-(1+i)}{-m(1+i)} = \frac{-(1-i)^2}{2} + \frac{1}{m} = \frac{-(-2i)}{2} + \frac{1}{m} = i + \frac{1}{m}$$

b. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Déterminer l'ensemble (Γ) des points M tels que le quadrilatère MNPQ soit un rectangle.

MNPQ étant un parallélogramme est un rectangle si et seulement si $(\overrightarrow{NP}, \overrightarrow{NM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$.

MNPQ est un rectangle $\arg \frac{m-n}{p-n} = \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$.

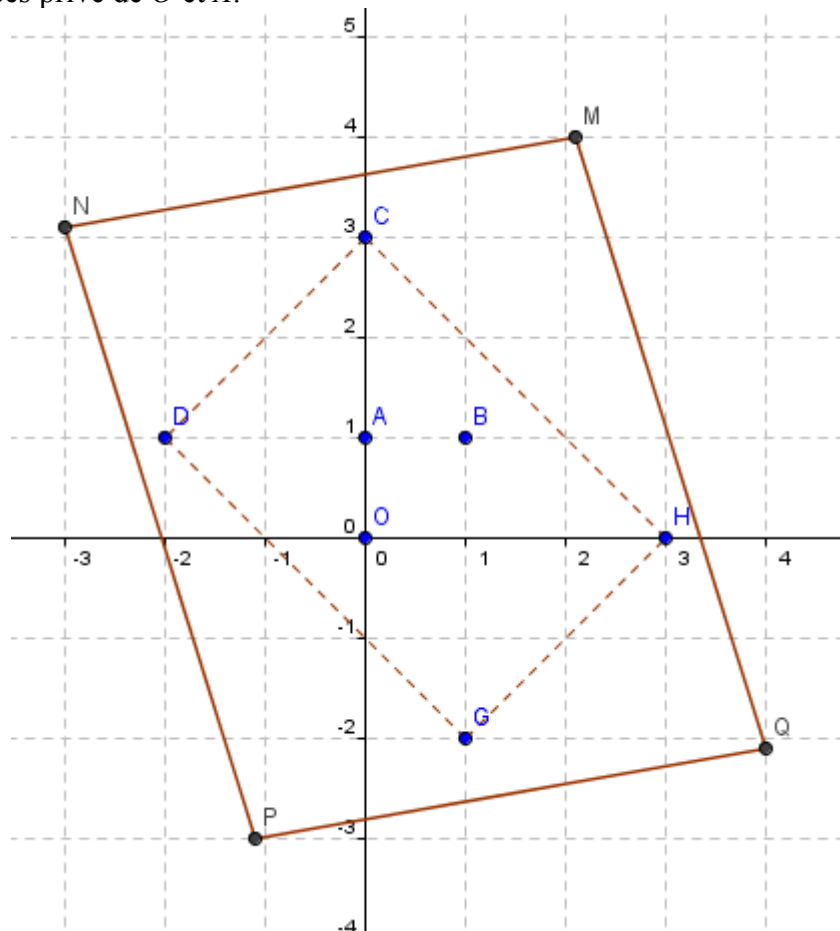
On cherche donc : $i + \frac{1}{m}$ est un imaginaire pur avec $m \neq 0$ et $m \neq i$

$i + \frac{1}{m} = y i$ avec $y \in \mathbb{R}$.

$\frac{1}{m} = (y-1) i$ ou encore, pour $y \neq 1, m = \frac{1}{1-y} i$

Quand y parcourt $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\frac{1}{1-y}$ parcourt \mathbb{R}^*

Γ est l'axe des ordonnées privé de O et A .



EXERCICE 2 4 points

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Une salle informatique d'un établissement scolaire est équipée de 25 ordinateurs dont 3 sont défectueux. Tous les ordinateurs ont la même probabilité d'être choisis.

On choisit au hasard deux ordinateurs de cette salle.

Quelle est la probabilité que ces deux ordinateurs soient défectueux ?

Une méthode :

On prend deux ordinateurs **simultanément** parmi les 25 ordinateurs :

Soit A l'événement : " deux ordinateurs sont défectueux "

$$\text{Nombre d'éventualités : } \text{card}(\Omega) = \binom{25}{2} = \frac{25 \times 24}{2} = 300$$

$$\text{Nombre de cas favorables : } \text{card}(A) = \binom{3}{2} = 3$$

$$P(A) = \frac{3}{300} = \frac{1}{100}$$

Une autre méthode :

On prend successivement et sans remise les deux ordinateurs.

$$P(A) = \frac{3}{25} \times \frac{2}{24} = \frac{1}{100}$$

Partie B

La durée de vie d'un ordinateur (c'est-à-dire la durée de fonctionnement avant la première panne), est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

Ainsi, pour tout réel t positif, la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie inférieure à t années,

notée $p(X \leq t)$, est donnée par : $p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$.

1. Déterminer λ sachant que $p(X > 5) = 0,4$.

$$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - \int_0^5 \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - [-e^{-\lambda x}]_0^5 = 1 - (-e^{-\lambda \times 5} - (-1)) = e^{-5\lambda}$$

On résout l'équation d'inconnue λ : $e^{-5\lambda} = 0,4$
l'exponentielle.

on applique la fonction \ln , bijection réciproque de

$$e^{-5\lambda} = 0,4 \Leftrightarrow -5\lambda = \ln 0,4 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln 0,4}{5}$$

une valeur approchée de λ est : 0,18 à 10^{-2} près par excès

2. Dans cette question, on prendra $\lambda = 0,18$.

Sachant qu'un ordinateur n'a pas eu de panne au cours des 3 premières années, quelle est, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 5 ans ?

En utilisant une propriété de la loi exponentielle :

Sachant que X suit une loi de durée de vie sans vieillissement, on sait : $P_{(X>3)}(X > 5) = P(X > 2)$

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \int_0^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-2\lambda}$$

comme $\lambda = 0,18$, $P_{(X>3)}(X > 5) = e^{-0,36} \approx 0,69$ à 10^{-2} près par défaut

En utilisant la définition d'une probabilité conditionnelle :

$$P_{(X>3)}(X>5) = \frac{P(X>3) \cap (X>5)}{P(X>3)} = \frac{P(X>5)}{P(X>3)} = \frac{e^{-5\lambda}}{e^{-3\lambda}} = e^{-2\lambda}$$

$$\text{ou } \frac{e^{-5\lambda}}{e^{-3\lambda}} = 0,4 \times e^{0,54} \quad \text{puisque } e^{-5\lambda} = 0,4 \quad \text{et } \lambda = 0,18$$

3. Dans cette question, on admet que la durée de vie d'un ordinateur est indépendante de celle des autres et que $p(X > 5) = 0,4$.

a. On considère un lot de 10 ordinateurs.

Quelle est la probabilité que, dans ce lot, l'un au moins des ordinateurs ait une durée de vie supérieure à 5 ans ? On donnera une valeur arrondie au millième de cette probabilité.

Soit Y la variable aléatoire donnant le nombre d'ordinateurs encore en vie au bout de 5 ans dans le lot de 10 ordinateurs.

Puisque la durée de vie d'un ordinateur est indépendante de celle des autres, Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10; 0,4)$

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{10}{0} \times 0,4^0 \times (1 - 0,4)^{10} = 1 - 0,6^{10}$$

$$P(Y \geq 1) \approx 0,994 \text{ à } 10^{-3} \text{ près par excès}$$

b. Quel nombre minimal d'ordinateurs doit-on choisir pour que la probabilité de l'événement « l'un au moins d'entre eux a une durée de vie supérieure à 5 ans » soit supérieure à 0,999 ?

Soit n le nombre minimal d'ordinateurs.

La démarche précédente en remplaçant 10 par n mène à : $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0,6^n$

On veut : le plus petit entier naturel n tel que : $1 - 0,6^n \geq 0,999$

Soit $0,6^n \leq \frac{1}{1000}$. En appliquant la fonction \ln strictement croissante sur \mathbb{R}^*

$$n \ln(0,6) \leq \ln \frac{1}{1000} \quad \text{Or } \ln 0,6 < 0 \text{ et } \ln \frac{1}{1000} = -\ln 1000$$

On a donc : $n \geq -\frac{\ln 1000}{\ln 0,6}$ Une valeur approchée de $-\frac{\ln 1000}{\ln 0,6}$ étant 13,5, on obtient :

$$n = 14$$

EXERCICE 3

5 points

Partie A : Restitution organisée de connaissances

On considère trois points A, B et C de l'espace et trois réels a , b et c de somme non nulle.

Démontrer que, pour tout réel k strictement positif, l'ensemble des points M de l'espace tels que $\|a\vec{MA} + b\vec{MB} + c\vec{MC}\| = k$ est une sphère dont le centre est le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs a , b et c .

Puisque $a + b + c \neq 0$, il existe un et un seul point G barycentre du système $\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$ et vérifiant :

$$a\vec{MA} + b\vec{MB} + c\vec{MC} = (a + b + c)\vec{MG}$$

$$\|a\vec{MA} + b\vec{MB} + c\vec{MC}\| = k \text{ équivaut à } \|(a + b + c)\vec{MG}\| = k$$

$$\text{Or, } \|(a + b + c)\vec{MG}\| = |a + b + c| \times \|\vec{MG}\| \quad (\text{Ne pas oublier la valeur absolue de la somme})$$

$$\|a\vec{MA} + b\vec{MB} + c\vec{MC}\| = k \text{ équivaut à } |a+b+c| \times \|\vec{MG}\| = k \text{ équivaut à } MG = \frac{k}{|a+b+c|}$$

L'ensemble des points M vérifiant l'égalité $\|a\vec{MA} + b\vec{MB} + c\vec{MC}\| = k$ est donc la sphère de centre G et de rayon $\frac{k}{|a+b+c|}$

Partie B

On considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1 représenté ci-dessous.

Il n'est pas demandé de rendre le graphique avec la copie.

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

1. Démontrer que le vecteur \vec{n} de coordonnées $(1; 0; 1)$ est un vecteur normal au plan (BCE).

Soient \vec{BC} et \vec{BE} deux vecteurs non colinéaires du plan (BCE).

$$\vec{BC} = \vec{AD} \text{ a pour coordonnées } (0; 1; 0) \text{ et } \vec{n} \cdot \vec{AD} = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 0 = 0$$

donc $\vec{n} \perp \vec{BC}$

$$\vec{BE} = \vec{AE} - \vec{AB} \text{ a pour coordonnées } (-1; 0; 1) \text{ et } \vec{n} \cdot \vec{BE} = 1 \times (-1) + 0 \times 0 + 1 \times 1 = 0$$

donc $\vec{n} \perp \vec{BE}$

Remarquer : $\vec{n} = \vec{AB} + \vec{AE} = \vec{AF}$

\vec{n} étant orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BCE) est un vecteur normal de (BCE)

2. Déterminer une équation du plan (BCE).

Un point $M(x; y; z) \in (BCE)$ si et seulement si $\vec{BM} \cdot \vec{n} = 0$

$$\text{si et seulement si } (x-1) \times 1 + (y-0) \times 0 + (z-0) \times 1 = 0$$

$$\text{si et seulement si } x + z - 1 = 0$$

$x + z - 1 = 0$ est une équation du plan (BCE).

3. On note (Δ) la droite perpendiculaire en E au plan (BCE).

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) .

Δ a pour vecteur directeur \vec{n} .

Un point $M(x; y; z) \in (\Delta)$ si et seulement si \vec{EM} et \vec{n} sont colinéaires.

si et seulement si, il existe un réel t tel que $\vec{EM} = t \vec{n}$

$$\text{si et seulement si } \begin{cases} x-0 = t \times 1 \\ y-0 = t \times 0 \\ z-1 = t \times 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ est une représentation paramétrique de la droite } (\Delta).$$

4. Démontrer que la droite (Δ) est sécante au plan (ABC) en un point R, symétrique de B par rapport à A.

Le plan (ABC) a pour équation $z = 0$.

Un point commun à (Δ) et (ABC) a ses coordonnées solution du système :
$$\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=1+t \\ z=0 \end{cases}$$
 qui a pour solution

évidente :

$$x = -1 ; y = 0 ; z = 0$$

$$R(-1 ; 0 ; 0)$$

Comme $B(1 ; 0 ; 0)$, A est le milieu de $[BR]$, ce qui prouve que R est symétrique de B par rapport à A .

5. a. Démontrer que le point D est le barycentre des points R , B et C affectés des coefficients respectifs 1, -1 et 2.

Le barycentre G du système est défini par : $(1 - 1 + 2) \vec{AG} = \vec{AR} - \vec{AB} + 2 \vec{AC}$

Comme $\vec{AR} = -\vec{AB}$, on a : $2 \vec{AG} = -2 \vec{AB} + 2 \vec{AC}$, soit : $\vec{AG} = \vec{BA} + \vec{AC} = \vec{BC} = \vec{AD}$

G et D sont confondus.

Ou encore

$$\text{les coordonnées de } G \text{ sont : } \begin{cases} x_G = \frac{1 \times (-1) - 1 \times 1 + 2 \times 1}{1 - 1 + 2} \\ y_G = \frac{1 \times 0 - 1 \times 0 + 2 \times 1}{1 - 1 + 2} \\ z_G = \frac{1 \times 0 - 1 \times 0 + 2 \times 0}{1 - 1 + 2} \end{cases}, \text{ d'où, } G(0 ; 1 ; 0)$$

b. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que $\|\vec{MR} - \vec{MB} + 2 \vec{MC}\| = 2 \sqrt{2}$.

D'après la question précédente et la partie A/, $\|\vec{MR} - \vec{MB} + 2 \vec{MC}\| = 2 \sqrt{2}$ équivaut à

$$2 \|\vec{MD}\| = 2 \sqrt{2}$$

$$MD = \sqrt{2}$$

(S) est la sphère de centre D et de rayon $\sqrt{2}$.

c. Démontrer que les points B , E et G appartiennent à l'ensemble (S)

Comme $DE = DB = DG = \sqrt{2}$ (diagonales d'un carré de côté 1 vaut $\sqrt{2}$), les points B , E et G appartiennent à la sphère (S)

d. Démontrer que l'intersection du plan (BCE) et de l'ensemble (S) est un cercle dont on précisera le rayon.

Le plan (BCE) et la sphère (S) sont sécants puisque E et B sont sur la sphère.

L'intersection d'un plan et d'une sphère est un cercle.

Soit I le centre du cercle.

La longueur DI est la distance du point D au plan (BCE) , d'où, $DI = \frac{|x_D + z_D - 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Le triangle DIB est rectangle en B et par conséquent :

$$IB^2 = DB^2 - DB^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$IB = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Compléments :

Le centre est sur la médiatrice de [BE] dans le plan (BCE)

Soit I le centre du cercle. (DI) est perpendiculaire à (BCE) et $I \in (BCE)$.

Comme \vec{DI} et \vec{n} sont colinéaires :
$$\begin{cases} x=t \\ y=1 \\ z=t \end{cases}$$

Dans l'équation de (BCE), on obtient : $t + t - 1 = 0$, donc, $t = \frac{1}{2}$

$I\left(\frac{1}{2} ; 1 ; \frac{1}{2}\right)$ est le centre du cercle.

$$BI = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ est le rayon du cercle}$$

Ou encore :

On cherche la perpendiculaire au plan (BCE) (*qui contient le point H*) passant par D.

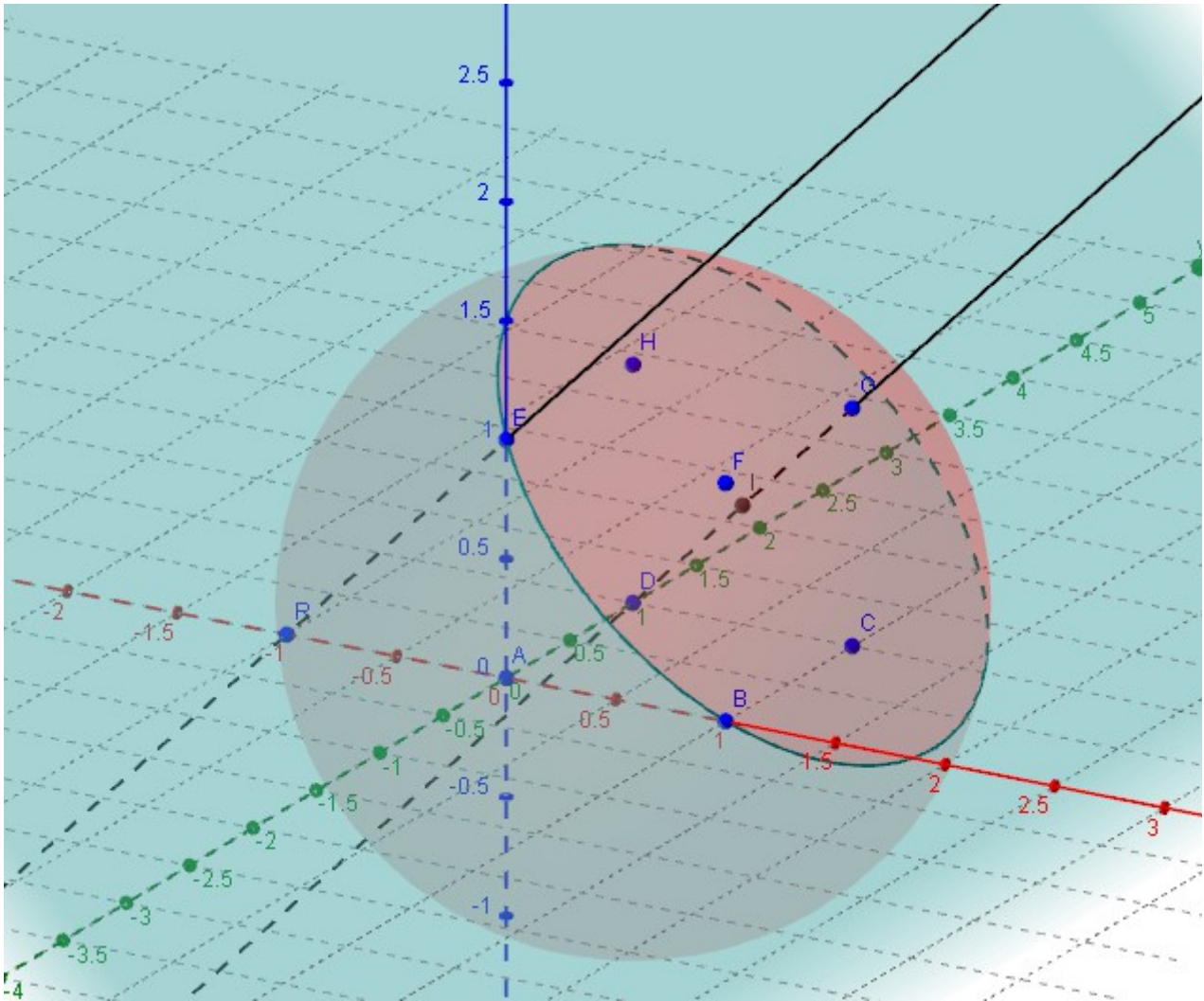
Comme (AF) est perpendiculaire à (BCE), on sait que, dans le cube, (DG) parallèle à (AF) est perpendiculaire à (BCE).

(DG) coupe (CH) en I centre de la face CDHG.

$$I \text{ est donc le centre du cercle et le rayon : } BI = \sqrt{BC^2 + \left(\frac{CH}{2}\right)^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

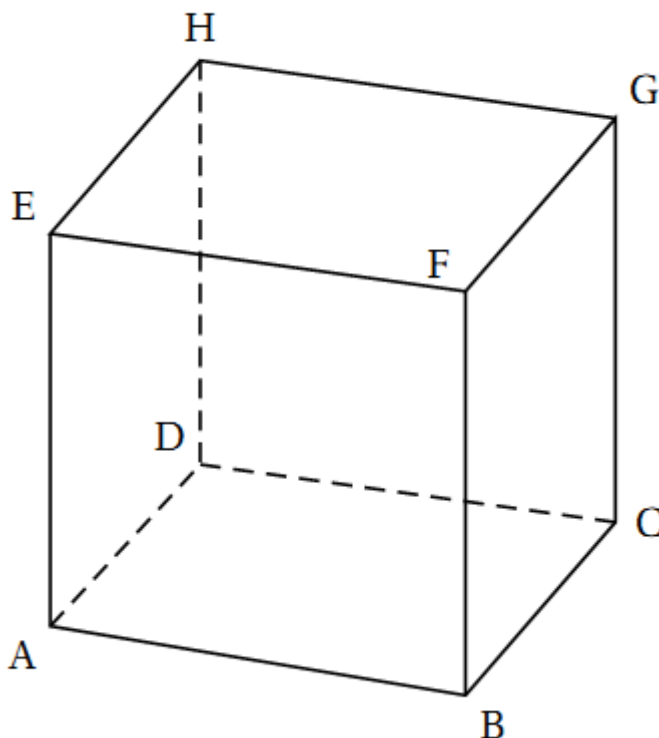
Amérique du Nord 27mai 2011

Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve. *Euclide d'Alexandrie*



« Le savoir n'est jamais inutile. Seulement il se trouve qu'il faut apprendre un tas de choses inutiles avant de comprendre les choses utiles »

Jörn Riel in *La maison de mes pères*



EXERCICE 4

6 points

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

1. Étudier les variations de la fonction g .

g est la somme de deux fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto -x - 1$ définies et dérivables sur $[0 ; +\infty[$.

g est donc dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et, pour tout $x \in [0 ; +\infty[$, $g'(x) = e^x - 1$

Comme la fonction \exp est strictement croissante sur \mathbb{R} et que $e^0 = 1$,
pour tout $x > 0$, $e^x > 1$

Par conséquent : Pour tout $x \geq 0$, $g'(x) \geq 0$.

La fonction g est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$

2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Or, $g(0) = 1 - 0 - 1 = 0$

Comme g est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$,

pour tout $x \geq 0$, $g(x) \geq 0$

3. En déduire que pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $e^x - x > 0$.

Il en découle : pour tout $x \geq 0$, $e^x - x - 1 \geq 0$, soit : $e^x - x \geq 1$.

Conclusion : pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $e^x - x > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}.$$

La courbe (C) représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal est donnée en annexe.

Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

On admet que f est strictement croissante sur $[0 ; 1]$.

1. Montrer que pour tout x de $[0 ; 1]$, $f(x) \in [0 ; 1]$.

$$f(0) = \frac{e^0 - 1}{e^0 - 0} = 0 \text{ et } f(1) = \frac{e^1 - 1}{e^1 - 1} = 1$$

Comme f est strictement croissante sur $[0 ; 1]$ alors :

si $0 \leq x \leq 1$ alors $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$, soit : $0 \leq f(x) \leq 1$.

Conclusion : pour tout x de $[0 ; 1]$, $f(x) \in [0 ; 1]$.

2. Soit (D) la droite d'équation $y = x$.

a. Montrer que pour tout x de $[0 ; 1]$, $f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$.

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{e^x - 1}{e^x - x} - x = \frac{e^x - 1 - x(e^x - x)}{e^x - x} \\ &= \frac{e^x(1-x) - (1-x^2)}{e^x - x} \\ &= \frac{e^x(1-x) - (1-x)(1+x)}{e^x - x} \\ &= \frac{(1-x)(e^x - (1+x))}{e^x - x} = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x} \end{aligned}$$

b. Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe (C) sur $[0 ; 1]$.

Puisque $g(x)$ et $e^x - x$ sont strictement positifs sur $]0 ; 1]$ et que $g(0) = 0$, le signe de $f(x) - x$ est celui de $1 - x$.

Conclusion :

Si $x = 0$ et si $x = 1$ alors $f(x) = x$.

Si $0 < x < 1$ alors $1 - x > 0$.

(D) et (C) se coupent aux points de coordonnées $(0 ; 0)$ et $(1 ; 1)$.

(C) est strictement au-dessus de (D) sur $]0 ; 1[$.

3. a. Déterminer une primitive de f sur $[0 ; 1]$.

On pose $u(x) = e^x - x$.

u est dérivable et $u'(x) = e^x - 1$

f est donc de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u > 0$.

Une primitive de f est la fonction F définie par $F(x) = \ln(e^x - x)$.

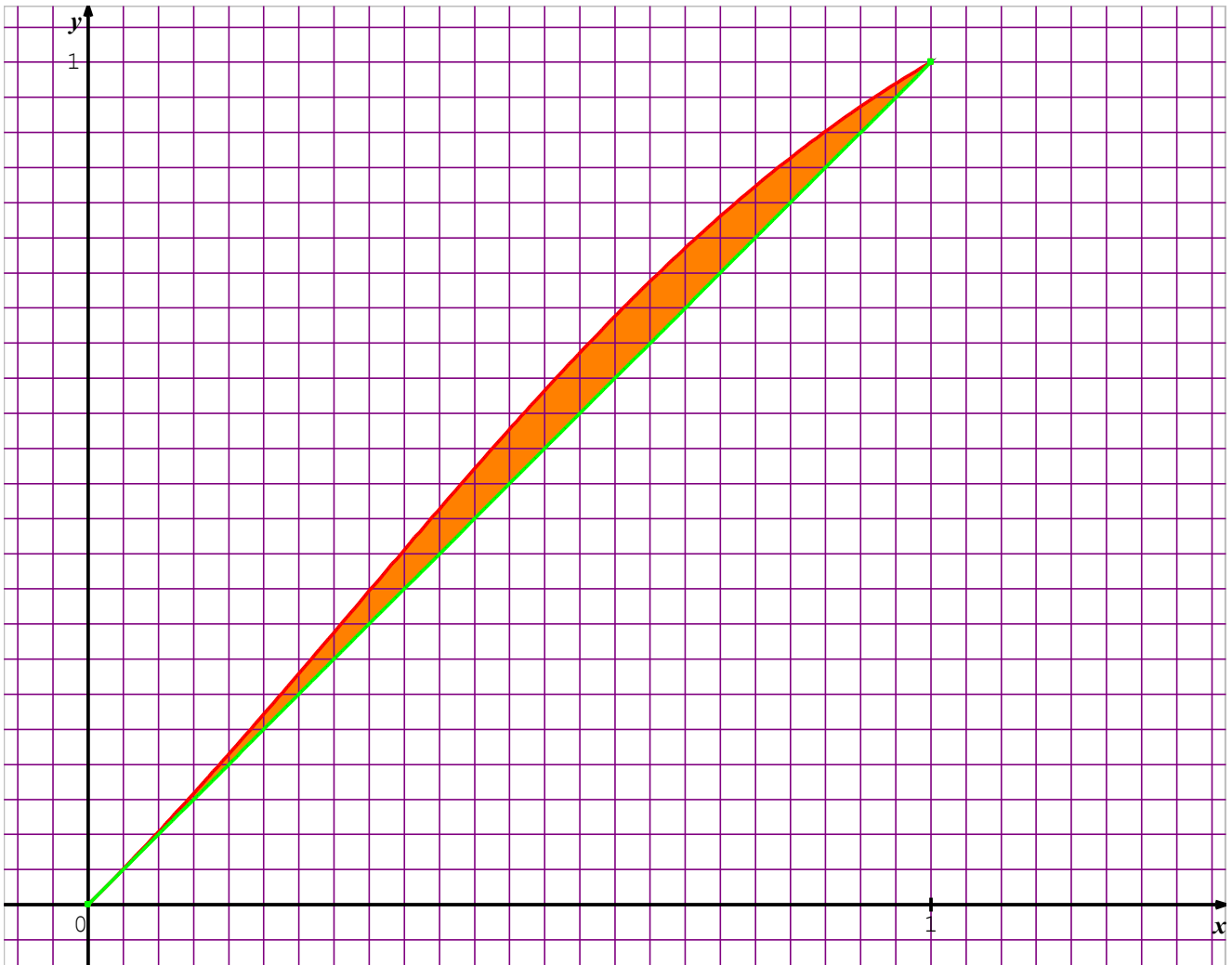
b. Calculer l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Puisque $f(x) \geq x$ sur $[0 ; 1]$, l'aire du domaine du plan délimité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est $\int_0^1 (f(x) - x) dx$ u.a.

$$\int_0^1 (f(x) - x) dx = \left[F(x) - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = F(1) - \frac{1}{2} - (F(0) - 0) = \ln(e - 1) - \frac{1}{2}, \text{ car } F(0) = \ln 1 = 0$$

l'aire du domaine vaut : $\mathcal{A} = \ln(e - 1) - \frac{1}{2}$ u.a.

(Une valeur approchée de \mathcal{A} est 0,0413 u.a)



Partie C

On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}, \text{ pour tout entier naturel } n .$$

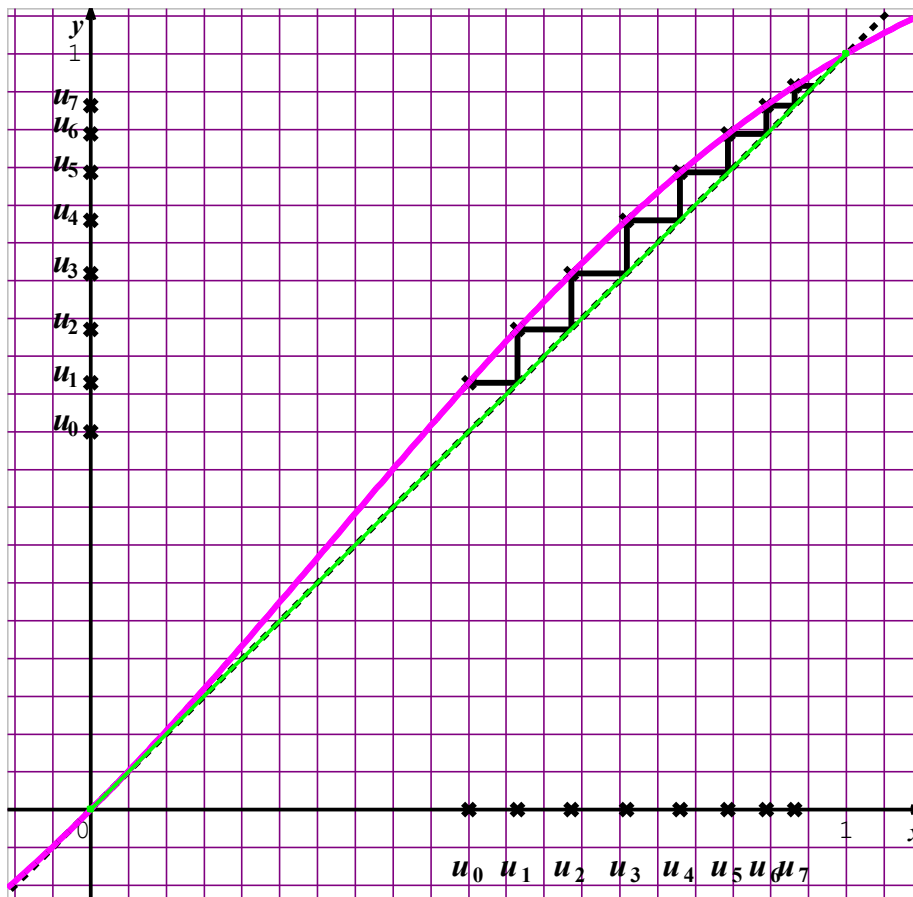
1. Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite en laissant apparents les traits de construction.

On place en abscisse $u_0 = \frac{1}{2}$, le point de (C) d'abscisse $\frac{1}{2}$ a pour ordonnée u_1 ,

le point de (D) d'ordonnée u_1 a pour abscisse u_1 , et, le point de (C) d'abscisse u_1 a pour ordonnée u_2 , et, ainsi de suite.

Plus généralement, connaissant l'abscisse u_n , on détermine u_{n+1} par l'ordonnée du point de (C) d'abscisse u_n .

On reporte sur (D) pour lire en abscisse u_{n+1} et, ainsi de suite.



2. Montrer que pour tout entier naturel n , $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

Preuve par récurrence :

Initialisation :

On sait que $f(x) > x$ si $x \in]0 ; 1[$, donc, $f\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{1}{2}$

Or, $u_0 = \frac{1}{2}$, d'où, $u_1 = f(u_0) > u_0$

D'autre part, pour tout $x \in [0 ; 1]$, $f(x) \in [0 ; 1]$, donc, $u_1 = f(u_0) \in [0 ; 1]$

On a : $\frac{1}{2} \leq u_0 < u_1 \leq 1$

Hérédité :

Soit un entier naturel k tel que $\frac{1}{2} \leq u_k < u_{k+1} \leq 1$

En appliquant f qui est strictement croissante sur $[0 ; 1]$, on obtient :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(u_k) < f(u_{k+1}) \leq 1,$$

$$\text{soit : } \frac{1}{2} \leq u_{k+1} < u_{k+2} \leq 1$$

Conclusion :

Pour tout entier naturel n , $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

La suite (u_n) est d'après la question précédente croissante et majorée par 1, elle est donc convergente et sa limite l est comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1.

On a d'une part : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(l)$ car f est **continue** sur $[0 ; 1]$

est donc la solution sur $[\frac{1}{2} ; 1]$ de l'équation $f(x) = x$.

D'après la partie B/, $l = 1$

Conclusion :

(u_n) converge vers 1.

EXERCICE 4

