EXERCICE 3 — 7 points — Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 2 - \frac{4\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+3}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

On sait: $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, d'où, successivement:

$\lim\limits_{x\to-\infty} 4\,\mathrm{e}^x = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x+3 = 3$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+3} = 0$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} x+2 = -\infty$, il vient: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

b. Démontrer que la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

D'après ce qui précède: $f(x) = x + 2 + \phi(x)$ avec $\lim\limits_{x\to-\infty} \phi(x) = 0$ Ce qui prouve le résultat.

c. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}_1$.

$\phi(x) = -\dfrac{4\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+3}$. Comme $\mathrm{e}^x > 0$, on a: $\phi(x) < 0$, d'où, $\mathscr{C}$ au-dessous de $\mathscr{D}_1$

2. a. On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = 1 - \frac{4\,\mathrm{e}^x(e^x+3)-\mathrm{e}^x\times 4\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+3)^2} = \frac{(\mathrm{e}^x+3)^2-4\,\mathrm{e}^x(e^x+3-e^x)}{(\mathrm{e}^x+3)^2} =$$

$$= \frac{(\mathrm{e}^x)^2+6\,e^x+9-12\,e^x}{(\mathrm{e}^x+3)^2} = \frac{(\mathrm{e}^x-3)^2}{(\mathrm{e}^x+3)^2} = \left(\frac{\mathrm{e}^x-3}{\mathrm{e}^x+3}\right)^2$$

b. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.

Il est évident que la dérivée $f'(x)$ est positive (elle s'annule en l'unique valeur ln 3), donc, que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. a. Que peut-on dire de la tangente $\mathscr{D}_2$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point I d'abscisse ln3 ?

Comme $f'(\ln 3) = 0$, la tangente à $\mathscr{C}$ en $I(\ln 3; f(\ln 3))$ est parallèle à l'axe des abscisses.

Son équation est $y = f(\ln 3) = \ln 3 + 2 - \dfrac{4\times 3}{3+3} = \ln 3$

b. En utilisant les variations de la fonction f, étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}_2$.

On a montré que f était strictement croissante sur $\mathbb{R}$, d'où,

Si $x > \ln 3$ alors $f(x) > f(\ln 3)$ et, la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de $\mathscr{D}_2$ sur $[3; +\infty[$

Si $x < \ln 3$ alors $f(x) < f(\ln 3)$ et, la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de $\mathscr{D}_2$ sur $]-\infty; 3]$

Résumé dans le tableau de variations:

x	$-\infty$		$\ln 3$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$		$\ln 3$		$+\infty$
Signe de $f(x) - \ln 3$		$-$		$+$	
Position relative		$\mathscr{C}$ au-dessous de $\mathscr{D}_2$		$\mathscr{C}$ au-dessus de $\mathscr{D}_2$	

4. a. Montrer que la tangente $\mathscr{D}_3$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation : $y = \dfrac{1}{4}x + 1$.

$f'(0) = ... = \dfrac{1}{4}$ et $f(0) = ... = 1$, ce qui prouve le résultat.

b. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la tangente $\mathscr{D}_3$ sur l'intervalle $]-\infty; \ln 3]$.

Il s'agit d'étudier le signe de la différence $d(x) = f(x) - \left(\dfrac{1}{4}x + 1\right)$

On a alors: $d'(x) = f'(x) - \dfrac{1}{4}$, puis, $d''(x) = f''(x)$

On pourra utiliser la dérivée seconde de f notée f'' définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par : $f''(x) = \dfrac{12e^x(e^x - 3)}{(e^x + 3)^2}$

Calcul de la dérivée seconde: (Pour l'entraînement)

$f'(x) = \dfrac{(e^x - 3)^2}{(e^x + 3)^2}$

La dérivée du numérateur $N(x) = (e^x - 3)^2$ *est* $N'(x) = 2e^x(e^x - 3)$

La dérivée du dénominateur $D(x) = (e^x + 3)^2$ *est* $D'(x) = 2e^x(e^x + 3)$

$$f''(x) = \frac{2e^x(e^x-3)(e^x+3)^2 - 2e^x(e^x+3)(e^x-3)^2}{(e^x+3)^4} = \frac{2e^x(e^x-3)(e^x+3)(e^x+3-e^x+3)}{(e^x+3)^4} = \frac{12e^x(e^x-3)}{(e^x+3)^3}$$

Si $x < \ln 3$ alors $e^x - 3 < 0$ et en ce cas, la dérivée $d''(x) < 0$,
d'où, la fonction dérivée première d' est strictement décroissante sur $]-\infty; \ln 3]$.

Or, $f'(0) = \dfrac{1}{4}$, d'où, $d'(0) = 0$

Si $x < 0$ alors $d'(x) > d'(0)$ et si $\ln 3 \geqslant x > 0$ alors $d'(x) > d'(0)$

On a donc: $d'(x) > 0$ sur $]-\infty; 0[$ et $d'(x) < 0$ sur $]0; \ln 3]$

La fonction d est par conséquent strictement croissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement décroissante sur $[0; \ln 3]$

d admet son maximum en 0 et ce maximum est $d(0) = 0$

Conclusion:

$d(x) \leqslant 0$ sur $]-\infty; \ln 3]$

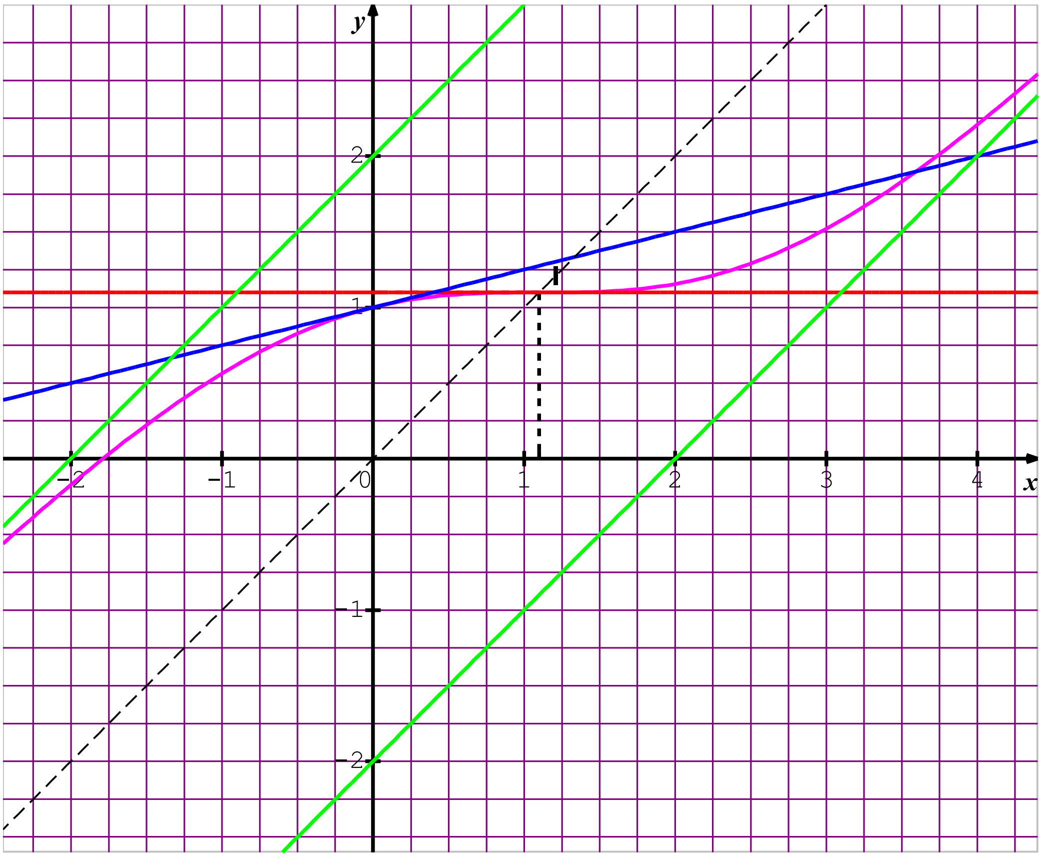
la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de la tangente $\mathscr{D}_3$ sur l'intervalle $]-\infty; \ln 3]$

Résumé dans un tableau:

x	$-\infty$		0		ln 3
d''(x)=f ''(x)		–		–	
d'(x)			0		
d'(x)=f '(x)– 1/4		+	0	–	
d(x) = f(x)–(1/4 x + 1)		↗	0	↘	
Signe de d(x)		–	0	–	
Position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}_3$		au-dessous		au-dessous	

5. On admet que le point *I* est centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.

Tracer la courbe $\mathscr{C}$, les tangentes $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$ et les asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$ .On rappelle que l'unité graphique choisie est 2 cm.



La courbe $\mathscr{C}$ en magenta, la tangente $\mathscr{D}_2$ en rouge, la tangente $\mathscr{D}_3$ en bleu, l'asymptote $\mathscr{D}_1$ et sa symétrique $\mathscr{D}'_1$ par rapport à *I* en vert.

6. a. Déterminer une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{e^x}{e^x+3}$.

Posons $u(x) = e^x + 3$.

On a alors: $u'(x) = e^x$ et $u(x) > 0$.

Une primitive de g est par conséquent $G: x \mapsto \ln(e^x + 3) + C$ où $C \in \mathbb{R}$

b. Soit λ un réel strictement négatif.

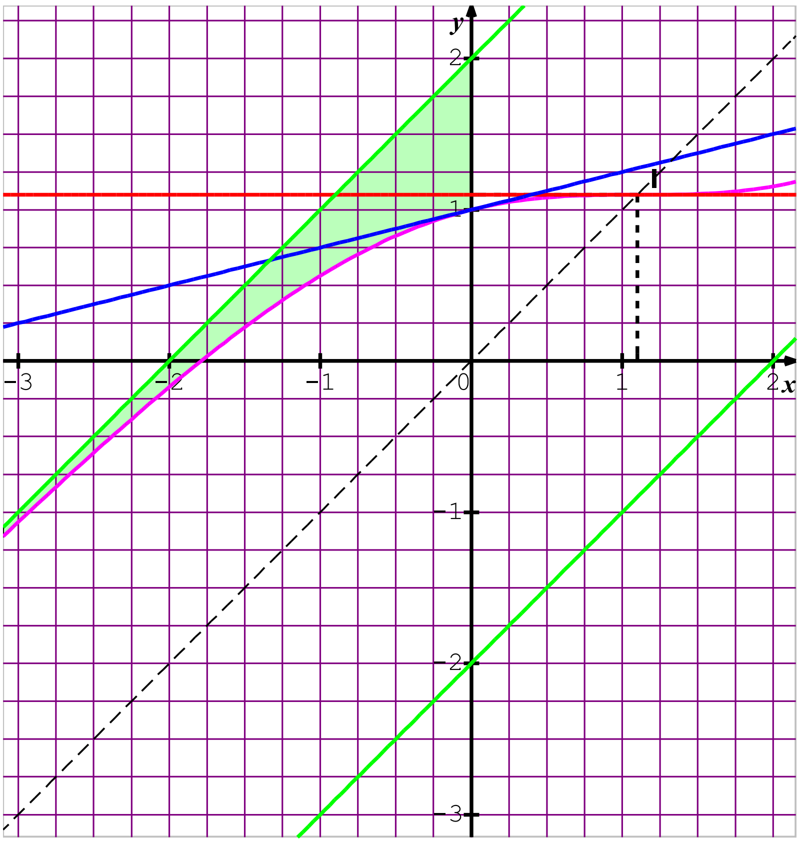
On note $\mathscr{A}(\lambda)$ l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 0$.

Montrer que $\mathscr{A}(\lambda) = 4\ln 4 - 4\ln(e^\lambda + 3)$.

Puisque sur $[\lambda; 0]$, $f(x) \leqslant x + 2$, et, en remarquant que $(x + 2) - f(x) = 4g(x)$,

l'aire $\mathscr{A}(\lambda) = \displaystyle\int_\lambda^0 (x+2-f(x))\,dx = 4\int_\lambda^0 g(x)\,dx = 4\left[\ln(e^x+3)\right]_\lambda^0 = 4(\ln 4 - \ln(e^\lambda + 3))$ u.a.

c. Calculer $\displaystyle\lim_{\lambda\to-\infty} A(\lambda) = 4\ln 4 - 4\ln 3 = 4\ln\frac{4}{3}$ puisque $\displaystyle\lim_{\lambda\to-\infty} e^\lambda = 0$ et que la fonction ln est continue en 3.



Complément:

Pour étudier la limite en $+\infty$, on factorise e^x ...

$f(x) = x + 2 - 4\times \dfrac{1}{1+\dfrac{3}{e^x}}$ ...

Ce qui montre en même temps que la droite d'équation $y = x - 2$ est une asymptote à $\mathscr{C}$.