**Exercice 4 (Antilles 2004)**

*ABCD* est un tétraèdre; *I* est le milieu de [*AB*] et *J* celui de [*CD*]

1 a) $G_1$ barycentre du système $\{(A, 1), (B, 1), (C, -1), (D, 1)\}$est barycentre de $\{(I, 2), (C, -1), (D, 1)\}$ d'après le théorème d'associativité.

On a: $2\ \overrightarrow{G_1 I} - \overrightarrow{G_1 C} + \overrightarrow{G_1 D} = \vec{0}$ , et, d'après la relation de Chasles:$- \overrightarrow{G_1 C} + \overrightarrow{G_1 D} = \overrightarrow{CD}$ , d

'où, $\overrightarrow{IG_1} = \dfrac{1}{2}\ \overrightarrow{CD}$

b) $G_2$ barycentre du système $\{(A, 1), (B, 1), (D, 2)\}$est barycentre de $\{(I, 2), (D, 2)\}$ d'après le théorème d'associativité.

$G_2$ est donc le milieu de [*ID*]

c) Comme *J* est le milieu de [*DC*], on a: $\overrightarrow{JD} = \dfrac{1}{2}\ \overrightarrow{CD}$

D'après 1a), , $\overrightarrow{IG_1} = \overrightarrow{JD}$ , le quadrilatère $IG_1DJ$ est donc un parallélogramme.

$G_2$ étant le milieu de la diagonale[*ID*], est celui de [$G_1J$]

2) *m* est un réel. $G_m$ barycentre du système $\{(A, 1), (B, 1), (C, m-2), (D, m)\}$

a) $G_m$ existe si et seulement si $1 + 1 + m - 2 + m \neq 0$ , soit, $m \neq 0$

$E = \mathbb{R}^*$

b) $m \neq 0$,

$G_m$ barycentre du système $\{(A, 1), (B, 1), (C, m-2), (D, m)\}$ est barycentre de $\{(I ; 2), (C, m-2), (D, m)\}$ d'après le théorème d'associativité.

On a: $2\ \overrightarrow{G_m I} + (m-2)\ \overrightarrow{G_m C} + m\ \overrightarrow{G_m D} = \vec{0}$ ,

On en déduit: $(2 + m - 2 + m)\ \overrightarrow{IG_m} = (m-2)\ \overrightarrow{IC} + m\ \overrightarrow{ID}$

Soit: $2m\ \overrightarrow{IG_m} = (m-2)\ \overrightarrow{IC} + m\ \overrightarrow{ID}$ ce qui prouve que $G_m$ est un point du plan (*ICD*)

c) $G_m$ barycentre du système $\{(A, 1), (B, 1), (C, m-2), (D, m)\}$ , d'où,

$(1 + 1 + m - 2 + m)\ \overrightarrow{JG_m} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + (m-2)\ \overrightarrow{JC} + m\ \overrightarrow{JD}$

Or, *J* milieu de [*CD*], donc, $m\ \overrightarrow{JC} + m\ \overrightarrow{JD} = \vec{0}$

Finalement: $2m\ \overrightarrow{JG_m} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} - 2\ \overrightarrow{JC} = 2\ \overrightarrow{JI} - 2\ \overrightarrow{JC} = 2\ \overrightarrow{CI}$

ce qui prouve que $m\,\overrightarrow{JG_m}$ est le vecteur constant $\overrightarrow{CI}$

d) D'après c) $\overrightarrow{JG_m}$ et $\overrightarrow{CI}$ sont colinéaires.

Comme *m* décrit $\mathbb{R}^*$ , $G_m$ est sur la parallèle $\Delta$ à (*IC*) passant par *J*

***Réciproquement***: Tout point *M* de $\Delta$ peut-il être barycentre du système donné au 2.

Soit *M* un point de $\Delta$.

Il existe un réel *k* tel que $\overrightarrow{JM} = k\ \overrightarrow{CI}$

L'égalité $m\ \overrightarrow{JM} = k\ \overrightarrow{CI}$ est vraie pour $m = k$ et donc pour $k \neq 0$.

On a alors : $M \neq J$.

$G_m$ décrit $\Delta$ privée de *J*.