L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$A(3 ; -2 ; 2)$; $B(6 ; 1 ; 5)$; $C(6 ; -2 ; -1)$

Partie I

donc $\overrightarrow{AB}(3;3;3)$ et $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$

1) On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$, d'où, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 3\times3 + 3\times0 + 3\times(-3) = 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, d'où ABC est un triangle rectangle en A

2) $\mathscr{P}$ plan d'équation $x + y + z - 3 = 0$

Un vecteur normal de P est $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{AB} = 3\ \vec{n}$, la droite ($A$B) est orthogonale à $\mathscr{P}$.

D'autre part, les coordonnées de A vérifient l'équation de $\mathscr{P}$.

$\mathscr{P}$ est donc orthogonal à (AB) et passe par A.

3) $\mathscr{P}' \perp (AC)$ et passant par A.

$M(x ; y ; z) \in \mathscr{P}'$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$ si et seulement si $3(x-3) + 0(y-2) - 3(z-2) = 0$,

Une équation de (P') est $x - z - 1=0$

4) Un point $M(x ; y ; z) \in \Delta$ intersection de (P) et (P') si et seulement si ses coordonnées sont solutions du système $\begin{cases}x+y+z-3=0\\x-z-1=0\end{cases}$ si et seulement si $\begin{cases}x=t\\y=-2t+4 \quad t\in\mathbb{R}\\z=-1+t\end{cases}$

Remarquer: $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$, un vecteur directeur de Δ, est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$.

Lorsque $t=3$, on obtient les coordonnées de A

Partie II

1) $D(0 ; 4 ; -1)$.

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$, Comme $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$ = ... = 0 et $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$ = ... = 0, la droite (AD) est orthogonale au plan (ABC)

2) Volume de $ABCD$ est $V = \frac{1}{3}$ *Aire(ABC)*$\times$*AD* puisque AD est la longueur de la hauteur relative à la base ABC.

ABC rectangle en A, d'où : Aire (ABC) = $\frac{AB\times AC}{2} = \frac{3\sqrt{3}\times3\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{6}}{2}$

AD = ... = $3\sqrt{6}$

V = ... = 27

3) $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC} = DB \times DC \cos \widehat{BDC}$, et $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC} = 6\times6 + (-3)\times(-6) + 6\times0 = 54$,

DB = ... = 9 et DC = ... = $6\sqrt{2}$ $\qquad$ $\cos \widehat{BDC}$ = ... = $\frac{1}{\sqrt{2}}$, donc, $\widehat{BDC} = \frac{\pi}{4}$

4) a) Aire (BDC)= $\dfrac{DC \times BD \sin \dfrac{\pi}{4}}{2} = \ldots = 27$

b) $V = \dfrac{1}{3} \text{Aire}(BDC) \times h$, d'où, $h = 3$