(E) : $z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=0$

I- 1) En remplaçant z par $-i$ dans l'expression, on montre que $-i$ est solution de (E).

Conséquence: Le polynôme $z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i$ est factorisable par $z+i$

2) a,b,c réels tels que $z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=(z+i)(az^2+bz+c)$

En développant, réduisant et ordonnant le second membre, on obtient par identification des coefficients:

$$az^3+(b+ai)z^2+(c+ib)z+ci \quad \begin{cases} a=1 \\ b+ai=-8+i \\ c+ib=17-8i \\ ci=17i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-8 \\ c=17 \end{cases}$$

3) (E) a pour solutions $-i$ et les solutions de $z^2-8z+17=0$ (E')

Résolution de (E') : $\Delta=-4=4\times i^2=(2i)^2$

(E') possède deux solutions complexes conjuguées: $z_1=\dfrac{8-2i}{2}=4-i$ et $z_2=4+i$

II- A,B,C les points d'affixes respectives $4+i, 4-i, -i$

1) Figure

2) Ω d'affixe 2. L'affixe s du point S image de A par la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ vérifie:

$s-2=i(4+i-2)$, soit, $s=1+2i$

3) $\Omega A=|4+i-2|=\sqrt{5}$, $\Omega B=|4-i-2|=\sqrt{5}$, $\Omega C=|-i-2|=\sqrt{5}$ et $\Omega S=|1+2i-2|=\sqrt{5}$, donc, les points B,A,S,C sont sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon $\sqrt{5}$.

4) À tout point M d'affixe $z\neq 2$, on associe le point M' d'affixe $z'=\dfrac{iz+10-2i}{z-2}$

a) L'affixe de A' est $a'=\dfrac{i(4+i)+10-2i}{4+i-2}=\dfrac{(9+2i)(2-i)}{5}=4-i$

L'affixe de B' est $b'=\dfrac{i(4-i)+10-2i}{2-i}=\dfrac{(11+2i)(2+i)}{5}=4+3i$

L'affixe de C' est $c'=\dfrac{i(-i)+10-2i}{-i-2}=\dfrac{(11-2i)(-2+i)}{5}=-4+3i$

b) Soit P d'affixe i, on a: $PA'=PB'=PC'=2\sqrt{5}$, d'où, A',B',C' sont sur le cercle $\mathcal{C}'$ de centre P et de rayon $2\sqrt{5}$

c) $|z'-i|=\left|\dfrac{iz+10-2i}{z-2}-i\right|=\left|\dfrac{10}{z-2}\right|=\dfrac{10}{|z-2|}$

d) Si M d'affixe z est sur $\mathcal{C}$, on a: $|z-2|=\sqrt{5}$, d'où, $|z'-i|=\dfrac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$

e) Les points M' associés aux points M du cercle $\mathcal{C}$ sont sur $\mathcal{C}'$