Index

EXERCICE 2 5 points Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.......1

EXERCICE 2 5 points Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On place dans ce repère, les points A d'affixe 1, B d'affixe b où b est un nombre complexe dont la partie imaginaire est strictement positive.

On construit à l'extérieur du triangle OAB, les carrés directs $ODCA$ et $OBEF$ comme indiqué sur la figure ci-dessous.

1. Déterminer les affixes c et d des points C et D.

A ayant pour affixe 1, on a : $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$.

Comme $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}) = -\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ et $OD = OA$, le point D est le point de module 1 et d'argument $-\frac{\pi}{2}$

Il a pour affixe $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$

Comme $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$, le point C a pour affixe $1 - i$

$c = 1 - i$ et $d = -i$

2. On note r la rotation de centre O et d'angle $+\frac{\pi}{2}$.

a. Déterminer l'écriture complexe de r .

l'écriture complexe de r est : $z' - z_O = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_O)$, soit : $z' = iz$.

b. En déduire que l'affixe f du point F est ib.

Par construction du carré direct $OBEF$, on a : $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OF}) = \frac{\pi}{2}$ et $OB = OF$.

F est l'image de B par la rotation r, d'où, $f = ib$.

c. Déterminer l'affixe e du point E.

Par construction du carré $OBEF$, on sait : $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OF}$, d'où, l'affixe e de E est $e = b + ib = b(1 + i)$

3. On appelle G le point tel que le quadrilatère $OFGD$ soit un parallélogramme.

Démontrer que l'affixe g du point G est égal à $i(b-1)$.

Par construction du parallélogramme $OFGD$, on a : $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OD}$, d'où,

l'affixe g de G est : $g = ib + (-i) = i(b - 1)$

4. Démontrer que $\frac{e-g}{c-g} = i$ et en déduire que le triangle EGC est rectangle et isocèle.

$\dfrac{e-g}{c-g} = \dfrac{b+\mathrm{i}b-(\mathrm{i}b-\mathrm{i})}{1-\mathrm{i}-(\mathrm{i}b-\mathrm{i})} = \dfrac{b+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}b}$

Or, $(1-\mathrm{i}b)\mathrm{i} = \mathrm{i}+b$, d'où, $\dfrac{b+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}b} = \mathrm{i}$

Comme le module de i est 1, on en déduit : $\left|\dfrac{e-g}{c-g}\right| = 1$ et comme $\left|\dfrac{e-g}{c-g}\right| = \dfrac{|e-g|}{|c-g|} = \dfrac{GE}{GC}$,

on obtient : $\dfrac{GE}{GC} = 1$, soit $GE = GC$.

D'autre part, un argument de i est $\dfrac{\pi}{2}$, on a donc : $\arg\left(\dfrac{e-g}{c-g}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

Or, $\arg\left(\dfrac{e-g}{c-g}\right) = \arg(e-g) - \arg(c-g) = (\vec{u}, \overrightarrow{GE}) - (\vec{u}, \overrightarrow{GC}) = (\overrightarrow{GC}, \overrightarrow{GE})$ $[2\pi]$.

Finalement : $(\overrightarrow{GC}, \overrightarrow{GE}) = \dfrac{\pi}{2}$

Conclusion : le triangle *EGC* est rectangle et isocèle.

ou encore : $e-g = \mathrm{i}(c-g)$ montre que le point *E* est image de *C* par la rotation de centre *G* et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, d'où, le triangle *ECG* est rectangle et isocèle direct.