Index

Exercice 1 **Nouvelle-Calédonie novembre 2009**

Lors du premier passage, les deux équipements ayant la même probabilité, on a: $u_1 = P(T_1) = \frac{1}{2}$

et $P(P_1) = \frac{1}{2}$

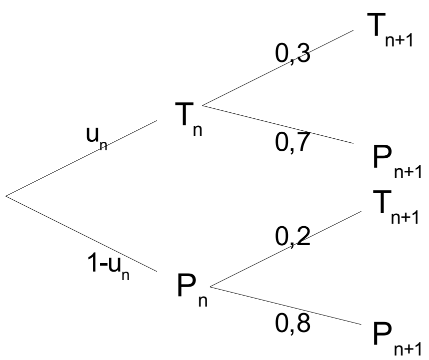
D'après l'énoncé: si le manchot a choisi le toboggan, la probabilité de reprendre le toboggan est 0,3, d'où, $P_{T1}(T_2) = 0,3$

Si le manchot a choisi le plongeoir, la probabilité de reprendre le plongeoir est 0,8, d'où, $P_{P1}(P_2) = 0,8$ et donc, la probabilité de prendre le toboggan sachant qu'il a pris le plongeoir est: $P_{P1}(T_2) = 1 - 0,8 = 0,2$

b) T_1 et P_1 forment une partition de l'univers (T_1 *e*t P_1 sont des événements disjoints), d'où,

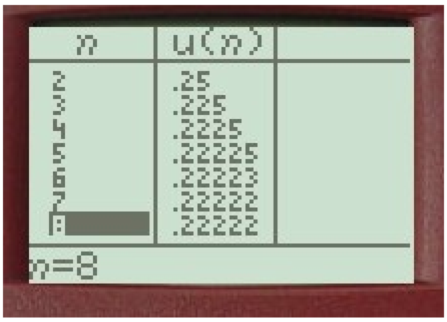
$$P(T_2) = P(T_1 \cap T_2) + P(P_1 \cap P_2) = P_{T1}(T_2) \times P(T_1) + P_{P1}(T_2) \times P(P_2) = 0,3 \times 0,5 + 0,2 \times 0,5 = 0,25 = \frac{1}{4}$$

c)



d) $u_{n+1} = P(T_{n+1}) = P(T_n \cap T_{n+1}) + P(P_n \cap T_{n+1}) = u_n \times 0,3 + (1 - u_n) \times 0,2 = 0,1u_n + 0,2$

e)



Il semble d'après la calculatrice que la suite (u_n) converge vers 0,222

2) Soit (v_n) définie par $v_n = u_n - \frac{2}{9}$

a) $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{9} = 0{,}1u_n + 0{,}2 - \frac{2}{9} = 0{,}1u_n - \frac{0{,}2}{9} = 0{,}1(u_n - \frac{2}{9}) = 0{,}1v_n$, ce qui prouve que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,1 et de premier terme $v_1 = u_1 - \frac{2}{9} = 0{,}5 - \frac{2}{9} = \frac{5}{18}$

b) On a alors: $v_n = v_1 \times 0{,}1^{n-1} = \frac{5}{18} \times 10 \times 10^{-n} = \frac{25}{9} \times 10^{-n}$

et $u_n = v_n + \frac{2}{9} = \frac{2}{9} + \frac{25}{9} \times 10^{-n}$

c) Comme $0 < 0{,}1 < 1$, la suite (v_n) converge vers 0 et par conséquent la suite (u_n) converge vers $\frac{2}{9}$;

Une valeur approchée de $\frac{2}{9}$ est 0,222 (ce qui valide le résultat conjecturé au 1.e))

Exercice 2 Nouvelle-Calédonie mars 2009 (non spécialité)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = 3+4i$.

Soit C et D les points d'affixes respectives $z_C = 2\sqrt{3} + i(-2 - \sqrt{3})$ et $z_D = -2\sqrt{3} + i(-2 + \sqrt{3})$.

L'objet de l'exercice est de proposer une construction géométrique des points D et C.

1) a. *Montrer que l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est le point D.*

L'image de *B* par la rotation de centre *A* et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est le point d'affixe $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z_B - z_A) + z_A$

On a donc: $z' = (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(3 + 4i - 1) + 1 = (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(2 + 4i) + 1$

$= -1 - 2\sqrt{3} + i(-2 + \sqrt{3}) + 1 = -2\sqrt{3} + i(-2 + \sqrt{3}) = z_D$.

b. *En déduire que les points B et D sont sur un cercle $\mathscr{C}$ de centre A dont on déterminera le rayon.*

Comme *D* est l'image de *B* par la rotation de centre *A*, on a:

$AB = AD = |z_B - z_A| = |2+4i| = \sqrt{2^2+4^2} = 2\sqrt{5}$ (rayon du cercle $\mathscr{C}$ de centre A)

2. *Soit F, l'image du point A par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{3}{2}$.*

a. *Montrer que l'affixe z_F du point F est $-2i$.*

On sait: $\overrightarrow{BF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA}$, d'où, on a: $z_F = \frac{3}{2}(z_A - z_B) + z_B$

$z_F = \frac{3}{2}(-2 - 4i) + 3 + 4i = -2i$

b. *Montrer que le point F est le milieu du segment [CD].*

L'affixe du milieu de [CD] est: $\dfrac{z_C + z_D}{2} = \ldots = -2\text{i} = z_F$

c. *Montrer que* $\dfrac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = -i\sqrt{3}$

$\dfrac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = \dfrac{2\sqrt{3} + \text{i}(-2-\sqrt{3}) + 2\text{i}}{1+2\text{i}} = \dfrac{(2\sqrt{3} - i\sqrt{3})(1-2\text{i})}{5} = \ldots = -\text{i}\sqrt{3}$.

En déduire la forme exponentielle de $\dfrac{z_C - z_F}{z_A - z_F}$.

$-\text{i}\sqrt{3}$ est le nombre complexe de module $\sqrt{3}$ et d'argument $-\dfrac{\pi}{2}$, d'où, $\dfrac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = \sqrt{3}\ \text{e}^{-i\frac{\pi}{2}}$

Déduire des questions précédentes que la droite (AF) est la médiatrice du segment [CD].

Puisque $\dfrac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = \sqrt{3}\ \text{e}^{-i\frac{\pi}{2}}$, on a: $(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FC}) = \arg\left(\dfrac{z_C - z_F}{z_A - z_F}\right) = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$,

d'où $\overrightarrow{FA} \perp \overrightarrow{FC}$

Or F est le milieu de [CD] , d'où, la droite (AF) est perpendiculaire à [AC] en son milieu.

La droite (AF) est la médiatrice du segment [CD].

3. *Proposer un programme de construction pour les points D et C à partir des points A, B et F et réaliser la figure.*

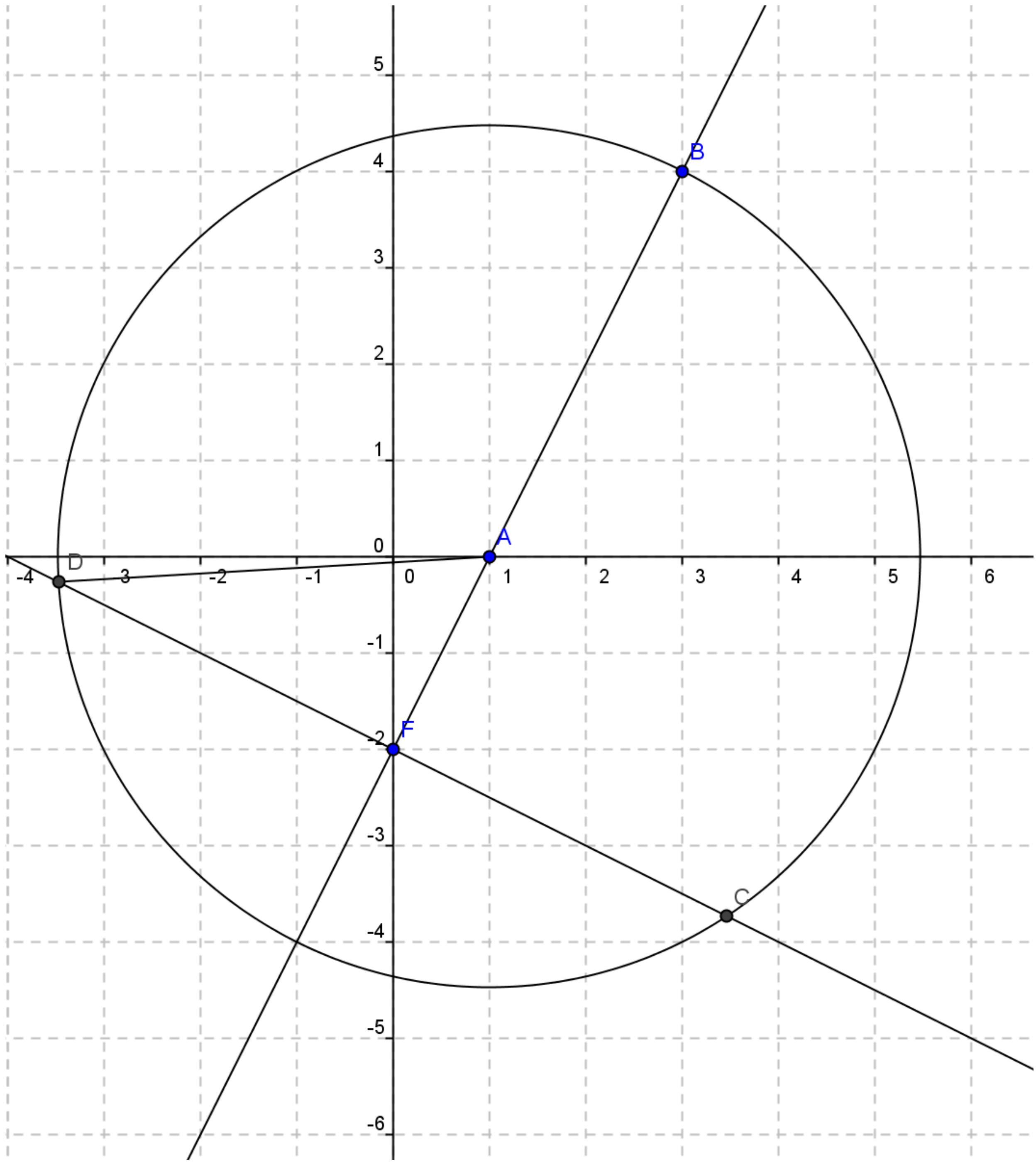
On trace la perpendiculaire à (AF) passant par F (cette droite porte le segment [CD]) et le cercle $\mathscr{C}$ de centre A passant par B.

Comme F est l'image du point A par une homothétie de centre B , les points A, B et F sont alignés.

La droite (AF) est un axe de symétrie de $\mathscr{C}$.

On obtient ainsi le point D, puis, le point C sur $\mathscr{C}$ symétrique de D par rapport à (AF).

Le point D a son abscisse négative, le point C a son abscisse positive. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \dfrac{2\pi}{3}$



Exercice 3 Amérique du Sud novembre 2009

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *.On prend 1 cm comme unité.*

Partie A: ROC

Soit D le point de coordonnées (x_D, y_D, z_D) et P le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ où a, b et c sont des réels non tous nuls.

La distance du point D au plan P est la distance DH où H est le projeté orthogonal de D sur P.

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur normal de *P*.

On calcule la valeur absolue du produit scalaire $\overrightarrow{DH}\cdot\vec{n}$ de deux façons différentes.

Puisque $\overrightarrow{DH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, $|\overrightarrow{DH}\cdot\vec{n}| = DH.\ \|\ \vec{n}\ \| = DH.\ \sqrt{a^2+b^2+c^2}$. (1)

D'autre part, $\overrightarrow{DH}\begin{pmatrix}x_H-x_D\\y_H-y_D\\z_H-z_D\end{pmatrix}$, d'où, $\overrightarrow{DH}\cdot\vec{n} = a(x_H - x_D) + b(y_H - y_D) + c(z_H - z_D)$

Comme $H \in P$, on a: $ax_H + by_H + cz_H + d = 0$, on a: $ax_H + by_H + cz_H = -d$, puis,

$\overrightarrow{DH}\cdot\vec{n} = -ax_D - by_D - cz_D - d$

On en déduit: $|\overrightarrow{DH}\cdot\vec{n}| = |-ax_D - by_D - cz_D - d| = |ax_D+by_D+cz_D+d|$ (2)

Par comparaison des égalités (1) et (2)

Conclusion: $DH = \dfrac{|ax_D+by_D+cz_D+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Partie B

$A(3; -2; 2)$, $B(6; -2; -1)$, $C(6; 1; 5)$ $D(4; 0; -1)$

1) Nature de *ABC*.

Une méthode:

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\3\\6\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = ... = 0$, donc, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

Le triangle *ABC* est rectangle en *A*.

Une autre méthode:

$AB^2 = 3^2 + 0^2 + (-3)^2 = 18$

$AC^2 = 3^2 + 3^2 + 3^2 = 27$

$BC^2 = 0^2 + 3^2 + 6^2 = 45$

Comme $BC^2 = AB^2 + AC^2$, d'après la réciproque de Pythagore, on a:

Le triangle *ABC* est rectangle en *A*.

L'aire de *ABC* est égale à $\mathscr{A}_{ABC} = \dfrac{AB\times AC}{2} = \dfrac{3\sqrt{2}\times 3\sqrt{3}}{2} = \dfrac{9}{2}\times\sqrt{6}$ cm²

2) Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 1\times3 + (-2)\times0 + 1\times(-3) = 0$, donc, $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 1\times2 - 2\times3 + 1\times 3 = 0$, donc, $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

Comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Soit $M(x; y ; z)$ un point de l'espace.

$M \in (ABC)$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$

Une équation du plan ABC est donc: $1\times(x-3) - 2(y+2) + 1\times(z-2) = 0$

$x - 2y + z - 9 = 0$

3) D'après la partie A/, la distance de D au plan ABC est $h = \dfrac{|1\times4-2\times0+1\times(-1)-9|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}} = \sqrt{6}$.

Le volume du tétraèdre $ABCD$ est: $\mathcal{V}_{\text{ABCD}} = \dfrac{1}{3}\mathcal{A}_{\text{ABC}}\times h = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{9}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{6} = 9$ cm^3

Partie C

Soit Q le plan d'équation $x - 2y + z - 5 = 0$

1) Un vecteur normal de Q est donc $\vec{n}$.

Les plans (ABC) et Q sont strictement parallèles car ils ont le même vecteur normal $\vec{n}$.

Le point (0; 0; 9) est un point de P qui n'est pas un point de Q.

2) Q coupe la droite (DA) au point E.

Puisque $E \in (DA)$, on sait qu'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{DE} = t\,\overrightarrow{DA}$.

On a donc: $\begin{cases} x_E - x_D = t(x_A - x_D) \\ y_E - y_D = t(y_A - y_D) \\ z_E - z_A = t(z_A - z_D) \end{cases}$, soit, $\begin{cases} x_E = 4 - t \\ y_E = -2t \\ z_E = -1 + 3t \end{cases}$.

Comme $E \in Q$, on a: $(4 - t) - 2\times(-2t) + (-1 + 3t) - 5 = 0$, d'où, $6t = 2$

$t = \dfrac{1}{3}$.

Les coordonnées de E sont $\left(\dfrac{11}{3} ; -\dfrac{2}{3} ; 0\right)$

Puisque $\overrightarrow{DE} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ et que $0 < \dfrac{1}{3} < 1$, le point E est sur le segment [DA].

3) Les plans (ABC) et Q étant parallèles, le plan Q coupe les côtés [DB] et [DC] suivant les points F et G et le tétraèdre $EFGD$ est une réduction du tétraèdre $ABCD$ par l'homothétie de centre D et de rapport 1/3.

Le volume de $EFGD$ est donc : $\mathcal{V}_{\text{EFGD}} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 \mathcal{V}_{\text{ABCD}} = \dfrac{1}{3}$ cm^3

Exercice 4 D'après Antilles Guyane juin 2008

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = \dfrac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x}$

Partie A:

Soit l'équation différentielle (E): $y' + 2y = 3e^{-3x}$.

1) Résoudre l'équation différentielle (E '): $y' + 2y = 0$.

$y' = -2y$ est de la forme $y' = ay$.

L'ensemble des solutions de (E ') est l'ensemble des fonctions: $x \mapsto Ce^{-2x}$ où $C \in \mathbb{R}$.

2) Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3e^{-3x}$ est une solution de l'équation (E).

Pour tout x réel, $g'(x) + 2g(x) = -3\times(-3)e^{-3x} + 2(-3e^{-3x}) = 3e^{-3x}$. *CQFD*

3) Montrer l'équivalence suivante:

La fonction h est solution de l'équation (E) si et seulement si la fonction $h-g$ est une solution de l'équation (E ′)

h est solution de (E) si et seulement si $h'(x)+2h(x)=3\mathrm{e}^{-3x}$.
Or, on a l'égalité suivante: $g'(x)+2g(x)=3\mathrm{e}^{-3x}$.
D'où,
h est solution de (E) si et seulement si $h'(x)+2h(x)=g'(x)+2g(x)$
h est solution de (E) si et seulement si $h'(x)-g'(x)+2(h(x)-g(x))=0$
h est solution de (E) si et seulement si $(h'-g')(x)+2(h-g)(x)=0$
h est solution de (E) si et seulement si $h-g$ est une solution de l'équation (E ′)

4) Vérifier que la fonction f est la solution de (E) telle que $f(0)=\dfrac{3}{2}$

D'après le 3) et le 1), h est une solution h de (E) si et seulement si $h(x)-g(x)=C\mathrm{e}^{-2x}$ où $C\in\mathbb{R}$.

$h: x\mapsto C\mathrm{e}^{-2x}-3\mathrm{e}^{-3x}$ où $C\in\mathbb{R}$.

h(0) = $C-3$, d'où, $C=\dfrac{3}{2}+3=\dfrac{9}{2}$.

$f(x)=\dfrac{9}{2}\mathrm{e}^{-2x}-3\mathrm{e}^{-3x}$

Partie B:

On nomme $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a: $f(x)=3\mathrm{e}^{-2x}\left(\dfrac{3}{2}-\mathrm{e}^{-x}\right)$.

En développant $3\mathrm{e}^{-2x}\left(\dfrac{3}{2}-\mathrm{e}^{-x}\right)=\ldots=f(x)$

2) a) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.

$\lim\limits_{x\to+\infty}-2x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{x}=0$, d'où, (limite d'une fonction composée), $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-2x}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{2}-\mathrm{e}^{-x}=\dfrac{3}{2}$,

d'où, limite d'un produit de fonctions, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

La droite d'équation $y=0$ (axe des abscisses) est une asymptote à $\mathscr{C}_f$.

b) Déterminer la limite en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}-2x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x}=+\infty$, d'où, $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-2x}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{2}-\mathrm{e}^{-x}=-\infty$,

d'où, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

3) Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau de variations de f.

D'après la partie A/, $f'(x) = 3e^{-3x} - 2f(x) = 3e^{-3x} - 9e^{-2x} + 6e^{-3x} = 9e^{-2x}(e^{-x} - 1)$

Comme pour tout X réel, $e^X > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $e^{-x} - 1$

$e^{-x} - 1 > 0$ si et seulement si $e^{-x} > 1$ si et seulement si $-x > 0$ si et seulement si $x < 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	0

$f(0) = \dfrac{3}{2}$

4) Montrer que l'équation $f(x) = -1$ admet une et une seule solution α dans $\mathbb{R}$.

Sur $[0; +\infty[$, la fonction f est décroissante et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, d'où, l'équation $f(x) = -1$ n'a aucune solution sur $[0; +\infty[$.

Sur $]-\infty; 0]$, f est continue

f est strictement croissante

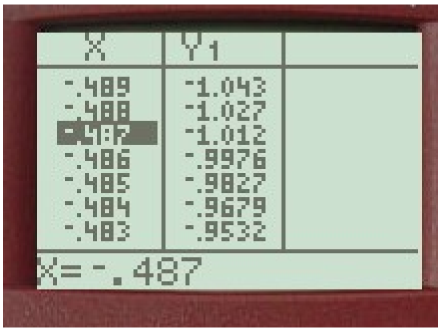
l'intervalle image est $]-\infty; \dfrac{3}{2}[$

Comme $-1 \in]-\infty; \dfrac{3}{2}[$, l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution sur $]-\infty; 0[$.

Soit α cette solution.

Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}.

Le tableur de la calculatrice donne



$-0{,}487 < \alpha < -0{,}486$

	Correction exercice de spécialité	**TS**

Exercice 2 (exercice de spécialité)

1) O≠A et A≠B donc il existe une unique similitude directe transformant O en A et A en B.

2) L'écriture complexe d'une similitude directe est de la forme $z'=az+b$ avec a≠0 .

Comme O ⟼A alors $z_A=az_O+b \Leftrightarrow \mathrm{i}=a(0)+b$

et A⟼B donc $z_B=az_A+b \Leftrightarrow 1+2\mathrm{i}=a(\mathrm{i})+b$

On obtient un système : $\begin{cases}\mathrm{i}=a(0)+b\\ 1+2\mathrm{i}=a\mathrm{i}+b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=\mathrm{i}\\ a\mathrm{i}=1+\mathrm{i}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=\mathrm{i}\\ a=\dfrac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=\mathrm{i}\\ a=1-\mathrm{i}\end{cases}$

L'écriture complexe de S est donc: $z'=(1-\mathrm{i})z+\mathrm{i}$

<u>Éléments caractéristiques de S:</u>

Rapport $k=|a|=|1-\mathrm{i}|=\sqrt{2}$

Angle θ = arg a = arg(1-i) = $-\dfrac{\pi}{4}\quad(2\pi)$

Centre de la similitude S: C'est l'unique point invariant: soit ω son affixe:

$\omega=(1-\mathrm{i})\omega+\mathrm{i} \Leftrightarrow \omega(1-1+\mathrm{i})=\mathrm{i} \Leftrightarrow \omega=\dfrac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=1$ Ω a donc pour affixe 1.

3) $A_0=O$, $A_1=A$ et $A_2=S(A)=B$

a) Faisons une démonstration par récurrence de la propriété (P_n) : $z_n=1-(1-\mathrm{i})^n$ pour tout $n\geqslant 0$

- pour n=0, z_0 est l'affixe de $A_0=O$ donc $z_0=0$

  d'autre part, $1-(1-\mathrm{i})^0=1-1=0$ donc (P_0) est vraie.
- Supposons qu'à un certain rang k, $z_k=1-(1-\mathrm{i})^k$ et montrons qu'alors $z_{k+1}=1-(1-\mathrm{i})^{(k+1)}$

On sait que $z_{k+1}=(1-\mathrm{i})z_k+\mathrm{i}$ car $A_{n+1}=S(A_n)$

donc, d'après l'hypothèse de récurrence, $z_{k+1}=(1-\mathrm{i})[1-(1-\mathrm{i})^k]+\mathrm{i}$

$= (1-\mathrm{i})-(1-\mathrm{i})^{(k+1)}+\mathrm{i}$

$= 1-(1-\mathrm{i})^{(k+1)}$

Donc la propriété (P_n) est héréditaire.

- D'après l'axiome de récurrence, la propriété (P_n) est donc vraie pour tout $n\geqslant 0$.

b) Affixe du vecteur $\overrightarrow{\Omega A_n}$: $z_n-\omega = 1-(1-\mathrm{i})^n-1 = -(1-\mathrm{i})^n$

Affixe du vecteur $\overrightarrow{A_nA_{(n+1)}}$: $z_{n+1}-z_n = 1-(1-\mathrm{i})^{(n+1)}-1+(1-\mathrm{i})^n = (1-\mathrm{i})^n(1-1+i)$

$= \mathrm{i}(1-\mathrm{i})^n$

On en déduit que $\dfrac{z_{(n+1)}-z_n}{z_n-\omega} = -\mathrm{i}$

D'où $\left|\dfrac{z_{(n+1)}-z_n}{z_n-\omega}\right| = |-\mathrm{i}|=1 = \dfrac{A_nA_{(n+1)}}{\Omega A_n}$ donc $A_nA_{(n+1)}=\Omega A_n$

($\overrightarrow{\Omega A_n}$, $\overrightarrow{A_nA_{(n+1)}}$) = arg $\left(\dfrac{z_{(n+1)}-z_n}{z_n-\omega}\right) = \arg(-\mathrm{i})=-\dfrac{\pi}{2}$

c) <u>Construction du point $A_{(n+1)}$:</u>

D'après b) ($\overrightarrow{\Omega A_n}$, $\overrightarrow{A_nA_{(n+1)}}$) = $-\dfrac{\pi}{2}$ donc ($\overrightarrow{A_n\Omega}$, $\overrightarrow{A_nA_{(n+1)}}$) = $\dfrac{\pi}{2}\quad(2\pi)$

Connaissant le point A_n , on construit le triangle $A_n\Omega A_{n+1}$ rectangle isocèle direct en A_n

<u>4) Points de la suite (A_n) appartenant à la droite (ΩB)</u>

$A_n \in (\Omega B) \Leftrightarrow (\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A_n}) = k.\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A_n}) = \arg\left(\frac{z_n-\omega}{z_B-\omega}\right) = \arg\left(\frac{1-(1-i)^n-1}{1+2i-1}\right) = \arg\left(\frac{-(1-i)^n}{2i}\right) = \arg\left(\frac{i(1-i)^n}{2}\right)$$
$$= \frac{\pi}{2} + \arg\,(1-i)^n = \frac{\pi}{2}+n\times\arg(1-i) = \frac{\pi}{2}-\frac{n\times\pi}{4}$$

$A_n \in (\Omega B) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}-n\frac{\pi}{4} = k.\pi \Leftrightarrow \frac{1}{2}-\frac{n}{4}=k \Leftrightarrow 2-n=4k \Leftrightarrow n=2-4k$ ou $n=2+4k \quad (k\in\mathbb{Z})$

Comme $n \geqslant 0$,

Par exemple n=2, n=6, n= 10 etc .

ou encore

$$z_n=1-(1-i)^n = 1-(\sqrt{2}\times e^{-i\pi/4})^n = 1-(\sqrt{2})^n e^{-\in\pi/4}$$
$$= 1-(\sqrt{2})^n(\cos(-n\pi/4)+i\times\sin(-n\pi/4))$$

$$A_n \in (\Omega B) \Leftrightarrow \Re(z_n)=1 \Leftrightarrow 1-(\sqrt{2})^n\times\cos\left(-n\frac{\pi}{4}\right)=1$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{2})^n\times\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow n\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad ; \; k\in\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow \frac{n}{4}=\frac{1}{2}+k \Leftrightarrow n=2+4k$$