Index

exercice C page 222 Baccalauréat S Centres étrangers juin 2004

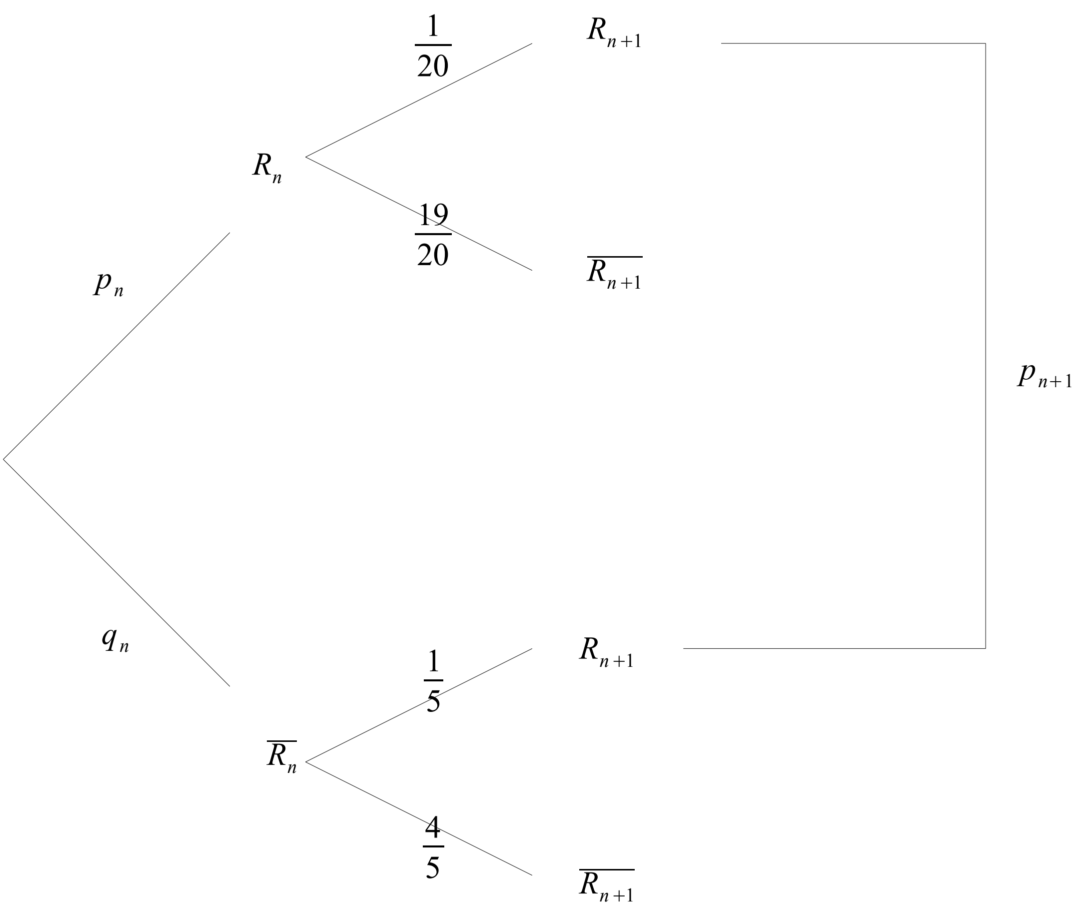
Un employé se rend à son travail en bus. S'il est à l'heure, il prend le bus de ramassage gratuit mis à disposition par l'entreprise, s'il est en retard, il prend le bus de la ville, il lui en coûte 1,50 €.

Si l'employé est à l'heure un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{5}$; s'il est en retard un jour donné la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{20}$.

Pour tout entier naturel non nul *n*, on appelle R_n l'évènement : « l'employé est en retard le jour *n* ». On note p_n , la probabilité de R_n et q_n , celle de $\overline{R_n}$. On suppose que $p_1 = 0$.

1. Détermination d'une relation de récurrence.

Jour *n* Jour *n* + 1



a. Déterminer les probabilités conditionnelles $p_{Rn}(R_{n+1})$ et $p_{\overline{Rn}}(R_{n+1})$.

$p_{Rn}(R_{n+1}) = \dfrac{1}{20}$ (Traduction de la phrase: s'il est en retard un jour donné la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\dfrac{1}{20}$.)

$p_{\overline{Rn}}(R_{n+1}) = \dfrac{1}{5}$ (Traduction de la phrase: Si l'employé est à l'heure un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\dfrac{1}{5}$.)

b. Déterminer $p(R_{n+1} \cap R_n)$ en fonction de p_n et $p(R_{n+1} \cap \overline{R_n})$ en fonction de q_n.

$p(R_{n+1} \cap R_n) = p_{Rn}(R_{n+1}) \times p(R_n) = \dfrac{1}{20}\ p_n$.

$p(R_{n+1} \cap \overline{R_n}) = p_{\overline{Rn}}(R_{n+1}) \times p(\overline{R_n}) = \dfrac{1}{5}\ q_n$

c. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et de q_n.

$p_{n+1} = p(R_{n+1}) = p(R_{n+1} \cap R_n) + p(R_{n+1} \cap \overline{R_n}) = \dfrac{1}{20}\ p_n + \dfrac{1}{5}\ q_n$

d. En déduire que $p_{n+1} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{20}\ p_n$.

Or, $p_n + q_n = 1$, d'où, $p_{n+1} = \dfrac{1}{20}\ p_n + \dfrac{1}{5}(1 - p_n) = \dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{20}\ p_n$.

2. Étude de la suite (p_n)..

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $v_n = p_n - \dfrac{4}{23}$.

a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{3}{20}$.

$v_{n+1} = p_{n+1} - \dfrac{4}{23} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{20}\ p_n - \dfrac{4}{23}$

Or, $p_n = v_n + \dfrac{4}{23}$, d'où, $v_{n+1} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{20}\left(v_n + \dfrac{4}{23}\right) - \dfrac{4}{23} = -\dfrac{3}{20}\ v_n + \dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{20} \times \dfrac{4}{23} - \dfrac{4}{23}$

Comme $\dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{20} \times \dfrac{4}{23} - \dfrac{4}{23} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{4}{23}\left(\dfrac{3}{20} + 1\right) = \dfrac{1}{5} - \dfrac{4}{23} \times \dfrac{23}{20} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{5} = 0$

On en déduit: $v_{n+1} = -\dfrac{3}{20}\ v_n$

(v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{3}{20}$ de premier terme $v_1 = 0 - \dfrac{4}{23} = -\dfrac{4}{23}$.

b. Exprimer v_n puis p_n en fonction de n.

Par conséquent: $v_n = -\dfrac{4}{23}\left(-\dfrac{3}{20}\right)^{n-1}$ et $p_n = -\dfrac{4}{23}\left(-\dfrac{3}{20}\right)^{n-1} + \dfrac{4}{23}$.

c. Justifier que la suite (p_n) est convergente et calculer sa limite.

Comme $-1 < -\dfrac{3}{20} < 1$, la suite géométrique (v_n) converge vers 0, et, la suite (p_n) converge vers $\dfrac{4}{23}$.

Arbre de probabilité