Index

EXERCICE 3 ***4 points*** ***Commun à tous les candidats***

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, on pourra donner un contre-exemple.

1. Pour tout complexe z, $Re(z^2) = (Re(z))^2$.

FAUX

Contre-exemple **:**

Un imaginaire pur bi ($b \in \mathbb{R}$) a une partie réelle nulle, d'où, $(\text{Re}(bi))^2 = 0^2 = 0$

$(bi)^2 = -b^2$ a pour partie réelle $-b^2$

Un autre contre-exemple :

$z = 1 + i$ a pour partie réelle 1, et, donc, $(Re(z))^2 = 1^2 = 1$

$z^2 = 1 - 1 + 2i = 0 + 2i$ a pour parie réelle 0.

De façon générale : $\text{Re}(z^2) = x^2 - y^2$ et $(\text{Re}(z))^2 = x^2$.

L'égalité a lieu si et seulement si $y^2 = 0$ si et seulement si z est un réel.

2. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Pour tout nombre complexe z non nul, les points M d'affixe z, N d'affixe $\bar{z}$ et P d'affixe $\frac{z^2}{|\bar{z}|}$ appartiennent à un même cercle de centre O.

VRAI

Preuve :

$|z| = OM$, $|\bar{z}| = OP$ et $|z| = |\bar{z}|$

$$\left|\frac{z^2}{\bar{z}}\right| = OP \text{ et } \left|\frac{z^2}{\bar{z}}\right| = \frac{|z^2|}{|\bar{z}|} = \frac{|z|^2}{|z|} = |z|$$

Comme $OM = ON = OP$ les points appartiennent à un même cercle de centre O.

3. Pour tout nombre complexe z, si $|1 + iz| = |1 - iz|$, alors la partie imaginaire de z est nulle.

VRAI

Preuve : **(Par le calcul)**

On pose $z = x + iy$ où x et y sont des réels.

$|1 + iz| = |1 - iz| \Leftrightarrow |1+i(x+iy)| = |1-i(x+iy)| \Leftrightarrow |1-y+ix| = |1+y-ix|$

Pour comparer les nombres positifs, il suffit de comparer leurs carrés, on a donc :

$(1 - y)^2 + x^2 = (1 + y)^2 + x^2$ qui équivaut à $(1 - y)^2 = (1 + y)^2$

Cette dernière égalité est vraie si et seulement si $1 - y = 1 + y$ ou $1 - y = -(1 + y)$

Soit $y = 0$ ou impossible.

Preuve : **(Par l'interprétation géométrique)**

Soit I et I' les points d'affixes 1 et –1 et M celui d'affixe z. N d'affixe iz est l'image de M par le quart de tour direct de centre O.

$|1 + \mathrm{i}z| = |1 - \mathrm{i}z| \Leftrightarrow |\mathrm{i}z - (-1)| = |-(\mathrm{i}z - 1)| \Leftrightarrow I'N = IN$

N est donc un point de la médiatrice de $[II']$, soit, un point de l'axe des ordonnées.
Son antécédent M par le quart de tour direct de centre O est donc sur l'axe des abscisses.

4. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Quels que soient les nombres complexes z et z' non nuls, d'images respectives M et M' dans le plan complexe, si z et z' vérifient l'égalité |z+z'| = |z−z'|, alors les droites (OM) et (OM') sont perpendiculaires.

VRAI

Preuve (Par l'interprétation géométrique):

D'après les données $\overrightarrow{OM}$ a pour affixe z et $\overrightarrow{OM'}$ a pour affixe z'.

Le point N défini par $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$ est le quatrième point du parallélogramme $OMNM'$ et a pour affixe $z + z'$.

$z - z'$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{M'M}$

L'égalité $|z + z'| = |z - z'|$ équivaut alors à $ON = MM'$.

Le parallélogramme $OMNM'$ ayant ses diagonales de même longueur est un rectangle.

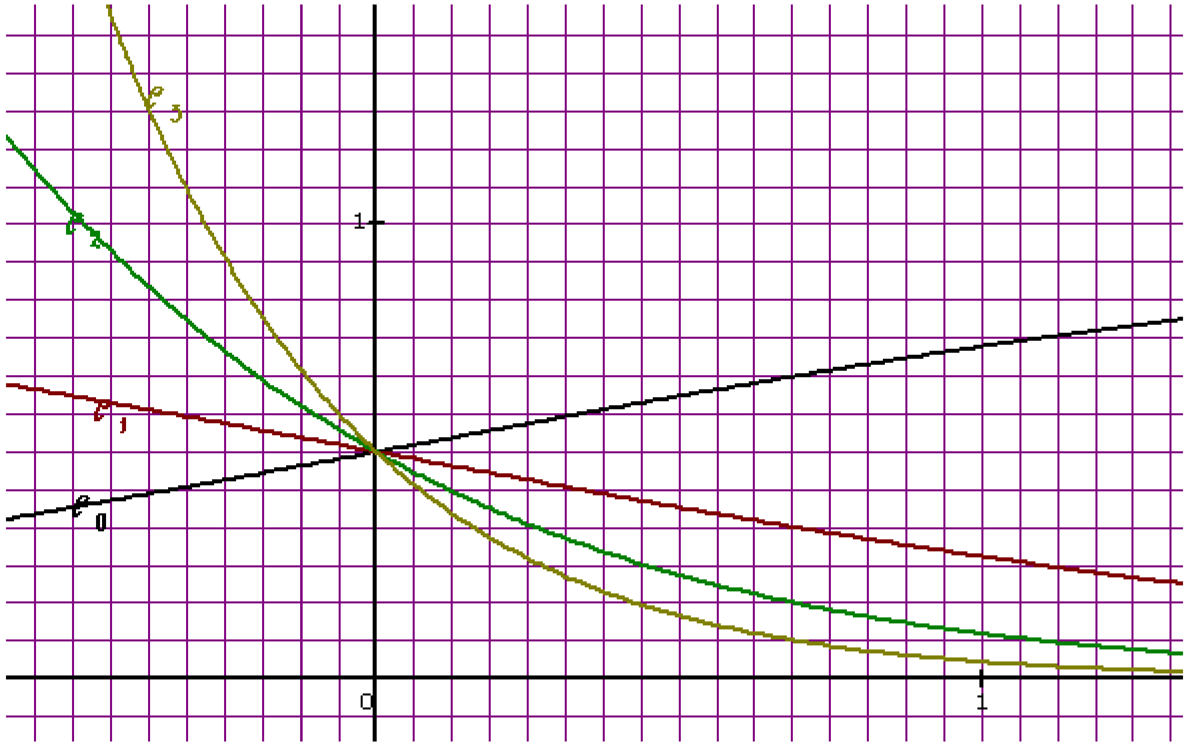
EXERCICE 4 **6 points** **Commun à tous les candidats**

Soit n un entier naturel.

On note f_n, *la fonction définie sur l'ensemble* $\mathbb{R}$ *des nombres réels par :* $f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

On note $\mathscr{C}_n$ *la courbe représentative de* f_n *dans un repère orthogonal.*

Les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ *et* $\mathscr{C}_3$ *sont représentées ci-dessous :*



Partie A *: Quelques propriétés des fonctions f_n et des courbes $\mathscr{C}_n$*

1. Démontrer que pour tout entier naturel n les courbes $\mathscr{C}_n$ ont un point A en commun. On précisera ses coordonnées.

Une méthode :

D'après le graphique, on peut conjecturer que le point $A(0\ ;\ \frac{1}{2})$ est commun aux courbes.

On vérifie alors :

Pour **tout** entier naturel n, $f_n(0) = \dfrac{e^{-n\times 0}}{1+e^{-0}} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$.

Une autre méthode :

Soient n et M deux entiers naturels distincts.

On cherche les solutions du système $\begin{cases} y = f_n(x) \\ y = f_m(x) \end{cases}$

L'équation aux abscisses mène à : $\dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} = \dfrac{e^{-mx}}{1+e^{-x}}$

Les dénominateurs étant égaux, on obtient : $e^{-nx} = e^{-mx}$

En appliquant la fonction ln, bijection réciproque de l'exponentielle, on a : $-nx = -mx$

soit : $x(m-n) = 0$

Comme m est n sont distincts, l'unique solution est $x = 0$.

On vérifie alors que $f_n(0) = f_m(0) = \dfrac{1}{2}$.

Conclusion :

pour tout entier naturel n les courbes $\mathscr{C}_n$ ont un point A en commun de coordonnées $\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\right)$

2. Étude de la fonction f_0

a. Étudier le sens de variation de f_0 .

$f_0(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$

Une méthode (fonction composée)

La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est une exponentielle strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0;+\infty[$,

d'où, la fonction $x \mapsto 1+\mathrm{e}^{-x}$ est une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]1;+\infty[$,

Comme la fonction inverse est décroissante sur $]1\ ;+\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Une autre méthode (Avec la dérivée)

f_0 est l'inverse d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, $u : x \mapsto 1+\mathrm{e}^{-x}$ et a pour dérivée $f'_0 = \dfrac{-u'}{u^2}$

On a donc : $f'(x) = \dfrac{-(-\mathrm{e}^{-x})}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$

Comme pour tout X réel $\mathrm{e}^X > 0$, la dérivée est strictement positive et la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b. Préciser les limites de la fonction f_0 en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement ces limites.

On sait : $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, d'où, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$

On en déduit : $\lim\limits_{x\to-\infty} (1+\mathrm{e}^{-x}) = +\infty$, puis, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} = 0$

L'axe des abscisses est asymptote à $\mathscr{C}_0$ en $-\infty$.

On sait : $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, donc, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, on en déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} = 1$

La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathscr{C}_0$ en $+\infty$.

c. Dresser le tableau de variation de fonction f_0 sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f_0\,'(x)$	$+$
$f_0(x)$	$0 \nearrow 1$

3. Étude de la fonction f_1

a. Démontrer que $f_0(x) = f_1(-x)$ pour tout nombre réel x.

$f_1(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

$f_1(-x) = \dfrac{e^{-(-x)}}{1+e^{-(-x)}} = \dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par le réel non nul e^{-x}, il vient :

$f_1(-x) = \dfrac{e^{x}\times e^{-x}}{e^{-x(1+e^{-x})}} = \dfrac{1}{e^{-x}+1} = f_0(x)$

b. En déduire les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et $+\infty$, ainsi que son sens de variation.

Comme $f_1(-x) = f_0(x)$ (ou encore : $f_1(x) = f_0(-x)$)

La limite en $-\infty$ de la fonction f_1 est la limite en $+\infty$ de la fonction f_0, d'où, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = 1$

La limite en $+\infty$ de la fonction f_1 est la limite en $-\infty$ de la fonction f_0, d'où, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 0$

La fonction f_1 est la composée de la fonction $x \mapsto -x$ qui est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ suivie de la fonction f_0 qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, d'où,

La fonction f_1 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

c. Donner une interprétation géométrique de 3. a. pour les courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.

Un point M_0 de $\mathscr{C}_0$ d'abscisse x a pour ordonnée $f_0(x)$.

À chaque point M_0 de $\mathscr{C}_0$ est associée un point M_1 de $\mathscr{C}_1$ d'abscisse $-x$ et d'ordonnée $f_1(-x)$
Les points M_0 et M_1 ont des abscisses opposées et des ordonnées égales. Ils sont donc symétriques par rapport à l'axe des ordonnées dans un repère **orthogonal**.

Les courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$. sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

4. Étude de la fonction f_n pour $n \geqslant 2$

a. *Vérifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et pour tout nombre réel x, on a : $f_n(x) = \dfrac{1}{e^{nx}+e^{(n-1)x}}$.*

$f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$.

En multipliant le numérateur et le dénominateur par le réel non nul e^{nx} , il vient :

$f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}\times e^{nx}}{(1+e^{-x})\times e^{nx}} = \dfrac{1}{e^{nx}+e^{(n-1)x}}$

b. Étudier les limites de la fonction f_n en $-\infty$ et en $+\infty$.

Pour $n \geqslant 2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} nx = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (n-1)x = -\infty$.

Comme $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^{nx}+e^{(n-1)x}\right) = 0$

En outre, $e^{nx} + e^{(n-1)x} > 0$,

d'où, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{e^{nx}+e^{(n-1)x}} = +\infty$.

D'autre part, en $+\infty$, on a successivement : $\lim\limits_{x\to+\infty} nx = \lim\limits_{x\to+\infty} (n-1)x = +\infty$ et comme $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$,

d'où, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^{nx}+e^{(n-1)x}} = 0$

c. Calculer la dérivée $f'_n(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$.

On a trouvé : $f_n(x) = \dfrac{1}{e^{nx}+e^{(n-1)x}}$ qui est l'inverse d'une fonction non nulle dérivable sur $\mathbb{R}$. (de la forme $f = \dfrac{1}{u}$ qui a pour dérivée $f' = \dfrac{-u'}{u^2}$)

$f'_n(x) = \dfrac{-\left[n e^{nx}+(n-1)e^{(n-1)x}\right]}{\left(e^{nx}+e^{(n-1)x}\right)^2}$ est strictement négative puisque $n \geqslant 2$ et $e^X > 0$ pour tout réel X.

La fonction f_n est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

En prenant la forme initiale de f_n :

f_n , étant le quotient de $x \mapsto e^{-nx}$ par $x \mapsto 1 + e^{-x}$ dérivables sur $\mathbb{R}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$, et, pour tout x réel, $f'_n(x) = \dfrac{-n e^{-nx}\times(1+e^{-x})-(-e^{-x})\times e^{-nx}}{(1+e^{-x})^2} = \dfrac{-e^{-nx}\left[n+(n-1)e^{-x}\right]}{(1+e^{-x})^2}$ qui est strictement négative puisque $n \geqslant 2$ et $e^X > 0$ pour tout réel X.

La fonction f_n avec $n \geqslant 2$ est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f_n'(x)$	$-$
$f_n(x)$	$+\infty \searrow 0$

Partie B : Étude d'une suite liée aux fonctions f_n

On pose, pour tout entier naturel n : $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$

1. Calculer u_1 puis montrer que $u_0 + u_1 = 1$. En déduire u_0.

On sait : $f_1(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$. On pose $u(x) = 1 + e^{-x}$, d'où, $u'(x) = -e^{-x}$.

f_1 est de la forme $-\dfrac{u'}{u}$ avec $u > 0$ qui admet des primitives de la forme $-\ln u + C = \ln\dfrac{1}{u} + C$ où $C \in \mathbb{R}$.

$u_1 = \displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\ln(1+e^{-x})\right]_0^1 = -\ln(1 + e^{-1}) - (-\ln 2) = \ln 2 - \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right)$

On peut aussi écrire : $u_1 = \ln 2 - \ln\dfrac{e+1}{e} = \ln 2 + \ln\dfrac{e}{e+1} = \ln\dfrac{2e}{e+1}$

$u_0 + u_1 = \displaystyle\int_0^1 f_0(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (f_0(x)+f_1(x))\,\mathrm{d}x$ (linéarité de l'intégrale)

Or, $\dfrac{1}{e^{-x}+1} = f_0(x) + f_1(x) = \dfrac{1}{e^{-x}+1} + \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \dfrac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}} = 1$

Par conséquent, $u_0 + u_1 = \displaystyle\int_0^1 1\,\mathrm{d}x = [x]_0^1 = 1$

On en déduit : $u_0 = 1 - u_1 = 1 - \ln 2 + \ln\left(1 + \dfrac{1}{e}\right)$

En remarquant que $\ln e = 1$ et que $\ln ab = \ln a + \ln b$, on a :

$u_0 = \ln(e + 1) - \ln 2 = \ln\dfrac{e+1}{2}$

2. Démontrer que, pour tout entier n : $0 \leqslant u_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 e^{-nx}\,\mathrm{d}x$

Comme $e^{-x} > 0$, on obtient : $1 + e^{-x} > 1$ et,

puisque la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, on a :

$0 < \dfrac{1}{1+e^{-x}} < 1$

En multipliant les membres de l'inégalité par $e^{-nx} > 0$, il vient :

$0 < f_n(x) < e^{-nx}$

Par conservation de l'ordre en intégrant sur $[0\,;1]$,

pour tout entier n : $0 \leqslant u_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 e^{-nx}\,\mathrm{d}x$

3. Calculer l'intégrale : $\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}\,x$ *. En déduire que la suite* (u_n) *est convergente et préciser sa limite.*

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}\,x = \left[-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^1 = -\frac{1}{n}(\mathrm{e}^{-n}-1) = \frac{1}{n}(1-\mathrm{e}^{-n})$$

Comme la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge vers 0 et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} = \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\mathrm{e}^{-n} = 1$.

Par produit, la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}\,x$ est 0.

Le théorème des gendarmes permet de conclure grâce à l'encadrement du 2/ que la suite (u_n) converge vers 0.