France juin 2004

Exercice 3 (France juin 2004)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$
$S(1;-2;0)$ et P d'équation $x+y-3z+4=0$ ($\vec{n}(1;1;-3)$ est un vecteur normal de P)
1) ***Réponse d)***
a) et c) sont exclus, car, un vecteur directeur de D est $\vec{n}(1;1;-3)$ et un vecteur directeur de D_a est $(1;-2;0)$ et de D_c est $(1;-2;3)$
b) et d)représentent des droites de vecteur directeur $\vec{n}(1;1;-3)$

Les coordonnées de S ne vérifient pas b), en effet, $\begin{cases} 1=2+t \\ -2=-1+t \\ 0=1-3t \end{cases}$ n'a pas de solutions ($t=-1$ et $t=\dfrac{1}{3}$)

Les coordonnées de S vérifient d), en effet, $\begin{cases} 1=2+t \\ -2=-1+t \\ 0=-3-3t \end{cases}$ a pour solution $t=-1$.

Complément: Une représentation paramétrique de D passant par S et perpendiculaire à P est donnée par: $M(x;y;z)\in D$ si et seulement si $\overrightarrow{SM}=\alpha\vec{n}$ avec $\vec{n}(1;1;-3)$

On en tire: $\begin{cases} x=1+\alpha \\ y=-2+\alpha \\ z=0-3\alpha \end{cases}$, $\alpha\in\mathbb{R}$

2) **Réponse d)**
Les coordonnées du point H vérifient le système d) de 1) et l'équation de P.
On a donc: $(2+t)+(-1+t)-3(-3-3t)+4=0$

On en déduit: $t=-\dfrac{14}{11}$

$$x_H=2-\frac{14}{11}=\frac{8}{11},\ y_H=-1-\frac{14}{11}=\frac{-25}{11}\quad et\ z_H=-3-3\times\left(\frac{-14}{11}\right)=\frac{9}{11}$$

3) **Réponse b)**

La distance de S au plan P est donnée par: $d=\dfrac{|1-2-3\times 0+4|}{\sqrt{1^2+1^2+(-3)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{11}}$

4) **Réponse b)**
Si un plan P coupe une sphère de centre S, l'intersection est un cercle si la distance du centre S au plan P est strictement inférieure au rayon ou un point si la distance du centre S au plan P est égale au rayon.

Or, $d(S,P)=\dfrac{3}{\sqrt{11}}$ est strictement inférieur au rayon $R=3$, l'intersection est un cercle de centre H (projeté orthogonal de S sur P)
D'après le théorème de Pythagore: $R^2=d^2+r^2$ où *r* est le rayon du cercle et $d=SH$
(Le triangle SHM avec M sur le cercle est un triangle rectangle en H)

On a donc: $r^2=9-\dfrac{9}{11}=\dfrac{90}{11}$, d'où, $r=3\sqrt{\dfrac{10}{11}}$

Exercice 4

Bac juin 2004 Loi de probabilité de durée de vie sans vieillissement
p est la probabilité que le composant ne soit plus en état de marche au bout de *t* semaines.

p est définie par $p([0;t[)=\displaystyle\int_0^t \lambda\, e^{-\lambda x}dx$

1) On sait que 50% d'un lot de ces composants est encore en état de marche au bout de 200 semaines.
On a donc 50% du lot qui n'est plus en état de marche au bout de 200 semaines.

$p([0\,;200[)=0{,}5$

Une primitive de $f: x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$ est $F: x \mapsto -e^{-\lambda x}$, d'où,

$$p([0\,;200[)=\int_0^{200} \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x} dx = F(200)-F(0)=-\mathrm{e}^{-\lambda 200}-(-\mathrm{e}^{-\lambda 0})=1-\mathrm{e}^{-\lambda 200}$$

On obtient: $1-\mathrm{e}^{-\lambda 200}=0{,}5$ qui équivaut à $\mathrm{e}^{-\lambda 200}=\dfrac{1}{2}$

qui équivaut à $-\lambda 200=\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\ln 2$ Conclusion: $\lambda=\dfrac{\ln 2}{200}$

2) La probabilité qu'un composant ait une durée de vie supérieure à 300 semaines est:

$$p([300\,;+\infty[)=1-p([0\,;300[)=1-\int_0^{300} \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x} dx=1-F(300)+F(0)=e^{-300\lambda} \quad \text{avec} \quad \lambda=\frac{\ln 2}{200}$$

$$p([300\,;+\infty[)=e^{\frac{-3\ln 2}{2}}=2^{\frac{-3}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Remarque $\dfrac{-3\ln 2}{2}=\dfrac{3}{2}\ln\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{8}=\ln\sqrt{\dfrac{1}{8}}=\ln\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

Une valeur décimale à 10^{-2} près par défaut est 0,35

3) La durée de vie moyenne d_m est la limite quand *A* tend vers $+\infty$ de $I=\int_0^{A} \lambda\, x\, \mathrm{e}^{-\lambda x} dx$

a) Calcul de l'intégrale par une intégration par parties.

Posons: $u(x)=x$, $v'(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ (c'est-à-dire $f(x)$ du 1)). On a: $u'(x)=1$ et $v(x)=F(x)=-e^{-\lambda x}$

Les fonctions *u* et *v* sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et à dérivées continues, d'où, $I=\left[x\left(-e^{-\lambda x}\right)\right]_0^A-\int_0^A -\mathrm{e}^{-\lambda x} dx$

$$I=A\left(-e^{-\lambda A}\right)-0+\int_0^A \mathrm{e}^{-\lambda x} dx \quad \text{Or,} \quad \int_0^A \mathrm{e}^{-\lambda x} dx=\left[\frac{1}{-\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^A=\frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda A})$$

$$I=-Ae^{-\lambda A}+\frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda A})=\frac{-\lambda A e^{-\lambda A}+1-e^{-\lambda A}}{\lambda}$$

b) On sait $\lim\limits_{x\to-\infty} x e^{x}=0$, d'où, $\lim\limits_{A\to+\infty}(-\lambda A)e^{-\lambda A}=0$ (limites de fonctions composées)

et, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$, d'où, $\lim\limits_{A\to+\infty} e^{-\lambda A}=0$ (limites de fonctions composées)

donc, $\lim\limits_{A\to+\infty}(-\lambda A)e^{-\lambda A}-e^{-\lambda A}+1=1$ (limites de sommes de fonctions)

Conclusion: $d_m=\lim\limits_{A\to+\infty} I=\dfrac{1}{\lambda}$ avec $\lambda=\dfrac{\ln 2}{200}$

Valeur exacte: $d_m=\dfrac{200}{\ln 2}$

valeur approchée à une semaine près par excès 289 semaines.

Exercice 5

Les lois de Newton conduisent à l'équation différentielle (E): $25x' + 200x'' = 50$

où x' est la dérivée première et x'' la dérivée seconde de la fonction *x* par rapport au temps

x est la loi horaire (fonction en mathématique) du mouvement.
Le terme $25\,x'$ est la valeur de la force de frottement due à la résistance (x' est la fonction donnant la vitesse)

Le terme $200x''$ est la valeur de la force due à l'accélération pour une masse de 200 kg.

50 est la valeur de la force d'entraînement.

Dans tout l'exercice $t \geqslant 0$

1) On pose $v(t) = x'(t)$ d'où, $v'(t) = x''(t)$.

En remplaçant dans(E): on a:

$$\begin{cases} 25\,x' + 200\,x'' = 50 \\ v(t) = x'(t) \\ v'(t) = x''(t) \end{cases} \quad \text{équivaut à} \quad \begin{cases} 25\,v(t) + 200\,v'(t) = 50 \\ v(t) = x'(t) \\ v'(t) = x''(t) \end{cases}$$

En divisant par 200 et en réorganisant, on a: (E) équivaut à (F): $v' = -\dfrac{1}{8}v + \dfrac{1}{4}$.

(Ne pas oublier de montrer l'équivalence)

L'équation (F) est de la forme $y' = ay + b$, d'où, en appliquant le cours, il vient:

avec $a = -\dfrac{1}{8}$, $b = \dfrac{1}{4}$ et $-\dfrac{b}{a} = 2$

Pour $t \geqslant 0$, $v(t) = C\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t} + 2$ avec $C \in \mathbb{R}$.

2) Les conditions initiales sont $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$

a) On a: $x'(t) = v(t) = C\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t} + 2$ et $v(0) = 0$,

d'où, $C\,\mathrm{e}^0 + 2 = 0$, soit: $C = -2$, puisque $\mathrm{e}^0 = 1$.

$x'(t) = -2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t} + 2$

b) Les fonctions x qui ont pour dérivée x' sont de la forme:

$x(t) = -2 \times \dfrac{1}{-\dfrac{1}{8}} \times \mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t} + 2t + K$ où $K \in \mathbb{R}$.

Soit $x(t) = 16\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t} + 2t + K$ où $K \in \mathbb{R}$.
Or, $x(0) = 0$, d'où, $16 + K = 0$.

Conclusion: $x(t) = 16\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t} + 2t - 16$ avec $t \geqslant 0$

On sait: $\lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0$, d'où, comme $\lim\limits_{t \to +\infty} -\dfrac{1}{8}t = -\infty$, on a, d'après la limite de fonction composée:

$\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t} = \lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0$.

Conclusion: $\lim\limits_{t \to +\infty} (-2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t} + 2) = 2$
La vitesse limite $V = 2$ (m.s^{-1})

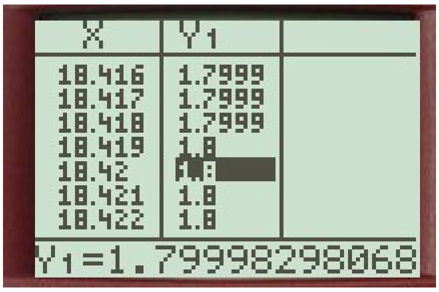
On cherche t telle que $v(t) \leqslant 0{,}9 \times V$, soit, $-2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t} + 2 \leqslant 1{,}8$

$-2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t} + 2 \leqslant 1{,}8$ équivaut à $\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t} \geqslant 0{,}1$

France juin 2004

Avant d'étudier le logarithme népérien:

En remarquant que la fonction v est croissante, un encadrement à la calculatrice donne:



$t \geqslant 18{,}421$ (valeur approchée à 10^{-3})

Après l'étude le logarithme népérien:

$e^{-\frac{1}{8}t} \geqslant 0{,}1$ équivaut à $-\dfrac{1}{8}\, t \leqslant \ln 0{,}1$ Or, $\ln 0{,}1 = -\ln 10$

d'où, $v(t) \leqslant 0{,}9\times V$ équivaut à $t \geqslant 8 \ln 10$

Une valeur approchée de 8 ln 10 est 18,4206 ...

La distance parcourue en 30 secondes est $x(30) = 2\times 30 - 16 + 16\, e^{-\frac{30}{8}} = 44 + 16\, e^{-\frac{30}{8}}$

Une valeur approchée au décimètre près par excès est $x(30) \approx 44{,}4$ mètres