Exercice 1
Partie A:
D'après (2), on sait: pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ et $v_n \leq v_0$.
(u_n) est donc une suite croissante majorée par v_0 .
D'après (3), (u_n) converge vers un réel *l*.
On a aussi: $u_0 \leq u_n$ et $u_n \leq v_n$, donc, (v_n) est une suite décroissante minorée. D'après (3), elle converge vers un réel *l'*.
Or, (u_n) et (v_n) étant adjacentes vérifient: $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$
Comme (u_n) et (v_n) convergent, on sait aussi: $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) - \lim\limits_{n \to +\infty} (v_n)$
On en déduit: $l - l' = 0$
Conclusion: (u_n) et (v_n) sont des suites convergentes vers la même limite *l*.

Partie B

1) ***Faux***. Contre-exemple $u_n = \frac{1}{n+1}$

2) ***Vrai***. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \geq 2$, donc, $\frac{1}{u_n} \leq 2$, puis, $\frac{-2}{u_n} \geq -1$
(v_n) est donc minorée par -1 .

3) ***Faux***. Contre-exemple: $u_n = \frac{1}{n+1}$

4) ***Faux***. Contre-exemple: $u_n = (-1)^n$

Exercice 2

1) C est le cercle de centre O' d'affixe $o'=\frac{1}{2}$ et de rayon $r=\frac{1}{2}$

$M\in C$ si et seulement si $O'M=r$

Or, $o'=\frac{1}{2}$, d'où, $M\in C$ si et seulement si $\left|(m-\frac{1}{2})\right|=\frac{1}{2}$

2) L'écriture complexe d'une rotation de centre I et d'angle α est caractérisée par $z'-z_I=e^{i\alpha}(z-z_I)$

$MKLO$ étant un carré direct, L est l'image de M par le quart de tour direct de centre O.

On a donc: $l=e^{i\frac{\pi}{2}}m$ $\quad l=im$

$MAPN$ étant un carré direct, P est l'image de M par le quart de tour indirect de centre A.

On a donc: $p-1=e^{i-\frac{\pi}{2}}(m-1)$ $\quad p=-i(m-1)+1$ $\quad p=-im+1+i$

On montre avec les quarts de tour indirects de centres respectifs P et M que N est l'image de A et K celle de O.
On obtient ainsi: $n=(1-i)m+i$ et $k=(1+i)m$

3) a) ω affixe de Ω est égal à $\omega=\frac{p+l}{2}=\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$

b) $\left|\omega-\frac{1}{2}\right|\left|\frac{i}{2}\right|=\frac{1}{2}$, d'où, Ω appartient à C.

Ω est tel que $OA\Omega$ est un triangle rectangle isocèle en Ω

4) a) $KN=|n-k|=|(1-i)m+i-(1+i)m|=|-2\mathrm{i}m+i|=|-2\mathrm{i}|.|m-1\mathrm{over}\,2|=2\times\frac{1}{2}=1$

b) L'affixe de $\overrightarrow{\Omega K}$ est $z_1=k-\omega=(1+i)m-\frac{1+i}{2}=(m-\frac{1}{2})(1+i)$

L'affixe de $\overrightarrow{\Omega N}$ est $z_2=n-\omega=(1-i)m+i-\frac{1+i}{2}=(m-\frac{1}{2})(1-i)$

On en déduit: $\Omega K=\left|(m-\frac{1}{2})(1+i)\right|=|m-1\mathrm{over}\,2|\times|1+i|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Omega N=\left|(m-\frac{1}{2})(1-i)\right|=|m-1\mathrm{over}\,2|\times|1-i|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

et comme $iz_2=z_1$, $(\overrightarrow{\Omega N},\overrightarrow{\Omega K})=\frac{\pi}{2}$

Le triangle ΩNK est un triangle rectangle isocèle de sommet Ω .

5) D'après le 4) $\Omega N=\frac{\sqrt{2}}{2}$

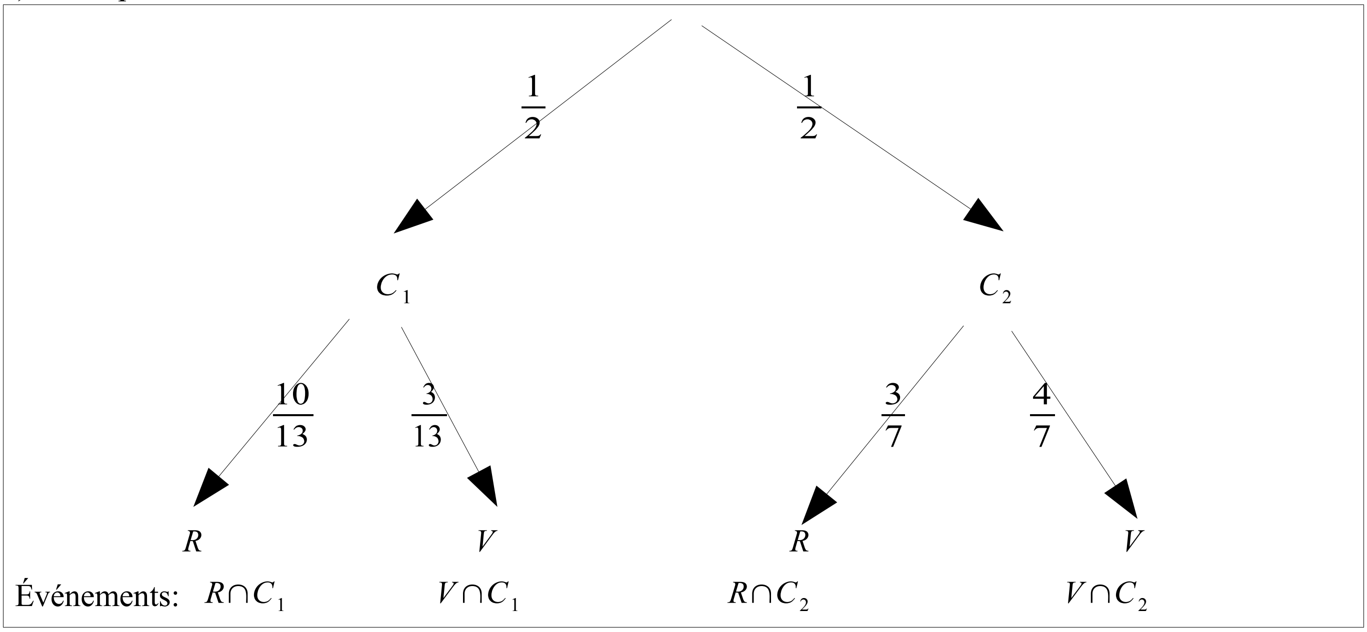
N est sur le cercle de centre Ω et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 3

1) a) b)

x_i	0	1	2	3	
$p(X=x_i)$	$\dfrac{\binom{3}{3}}{\binom{13}{3}} = \dfrac{1}{286}\approx 0{,}003$	$\dfrac{\binom{10}{1}\times\binom{3}{2}}{\binom{13}{3}} = \dfrac{30}{286}\approx 0{,}104$	$\dfrac{\binom{10}{2}\times\binom{3}{1}}{\binom{13}{3}} = \dfrac{135}{286}\approx 0{,}472$	$\dfrac{\binom{10}{3}}{\binom{13}{3}} = \dfrac{120}{286}\approx 0{,}419$	
$E(X)$	0	$\dfrac{30}{286}$	$\dfrac{270}{286}$	$\dfrac{360}{286}$	$E(X) = \dfrac{660}{286}=\dfrac{30}{13}\approx 2{,}307$

2) a) Arbre pondéré



b) $P(R)=P(R\cap C_1)+P(R\cap C_2)=P_{C_1}(R)\times P(C_1)+P_{C_2}(R)\times P(C_2)=\dfrac{10}{13}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{7}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{109}{182}\approx 0{,}598$

c) $P_R(C_1)=\dfrac{P(R\cap C_1)}{P(R)}=\dfrac{10}{13}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{182}{109}=\dfrac{70}{109}\approx 0{,}642$

3) a) $p_n=P(Y\geq 1)=1-p(Y=0)=1-\left(\dfrac{73}{182}\right)^n$

b) $1-\left(\dfrac{73}{182}\right)^n \geqslant 0{,}99$ équivaut à $\left(\dfrac{73}{182}\right)^n \leqslant 0{,}01$ On applique ln ....

équivaut à $n \ln \dfrac{73}{182} \leqslant \ln 0{,}01$ Comme $0 < \dfrac{73}{182} < 1$, $\ln \dfrac{73}{182} < 0$

équivaut à $n \geq \dfrac{\ln \frac{1}{100}}{\ln \frac{73}{182}}$

le plus petit entier n_0 est $n_0=6$

Exercice 4
Partie A

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{3e^{\frac{x}{4}}}{2+e^{\frac{x}{4}}}$

a) En multipliant le numérateur et le dénominateur par $e^{\frac{-x}{4}}$, on obtient: $f(x)=\dfrac{3}{1+2e^{\frac{-x}{4}}}$

b) On a: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{4}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$, d'où, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{-x}{4}}=0$.

On en déduit: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=3$

$\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$, d'où, $\lim\limits_{x\to-\infty}3e^{\frac{x}{4}}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(2+e^{\frac{x}{4}})=2$

On en déduit: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

c) En utilisant le a) et les fonctions composées:

$x\mapsto-\dfrac{x}{4}\mapsto e^{\frac{-x}{4}}\mapsto 2+e^{\frac{-x}{4}}\mapsto\dfrac{1}{2+e^{\frac{-x}{4}}}$, on montre que *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

ou

$f'(x)=\dfrac{3\times\left(\frac{1}{4}e^{\frac{x}{4}}\left(2+e^{\frac{x}{4}}\right)-\frac{1}{4}e^{\frac{x}{4}}e^{\frac{x}{4}}\right)}{\left(2+e^{\frac{x}{4}}\right)^2}=\dfrac{3e^{\frac{x}{4}}}{2\left(2+e^{\frac{x}{4}}\right)^2}$. Comme $f'(x)>0$, on en conclut: *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Partie B

1) a) Les solutions de l'équation différentielle (E_1) $y'=\dfrac{y}{4}$ sont les fonctions $t\mapsto Ce^{\frac{t}{4}}$ où $C\in\mathbb{R}$

b) Comme $g(0)=1$, on en déduit: $C=1$

g est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(t)=e^{\frac{t}{4}}$

c) On cherche t tel que $g(t)\geq 3$.

$e^{\frac{t}{4}}\geq 3$ équivaut à $t\geq 4\ln 3$.

Après la $5^{ième}$ année, la population dépasse 300 individus.

2) (E_2): $\begin{cases} u'(t)=\dfrac{u(t)}{4}-\dfrac{u(t)^2}{12} \textit{ pour tout nombre réel } t \textit{ positif ou nul}\\ u(0)=1\end{cases}$

a) On pose: $h=\dfrac{1}{u}$, d'où, $h'=\dfrac{-u'}{u^2}$ (On a aussi: $u=\dfrac{1}{h}$, d'où, $u'=\dfrac{-h'}{h^2}$)

On en déduit: $u'=h'u^2=\dfrac{-h'}{h^2}$

(E_2) équivaut à $\begin{cases}\dfrac{-h'(t)}{h^2(t)}=\dfrac{1}{4\mathrm{h}(t)}-\dfrac{1}{12h(t)^2} \textit{ pour tout nombre réel } t \textit{ positif ou nul}\\ h(0)=1\end{cases}$

En multipliant par $-h(t)^2$ qui est non nul, on obtient: (E_2) équivaut à (E_3): $\begin{cases} h'(t)=\dfrac{-h(t)}{4}+\dfrac{1}{12} \textit{ pour tout nombre réel } t \textit{ positif ou nul} \\ h(0)=1 \end{cases}$

b) Les solutions de $y'=-\dfrac{1}{4}y+\dfrac{1}{12}$ sont les fonctions: $t \mapsto Ce^{\frac{-1}{4}t}+\dfrac{1}{3}$

Comme $h(0)=1$, on obtient: $C=1-1\text{over}\,3=\dfrac{2}{3}$

$h(t)=\dfrac{2e^{\frac{-1}{4}t}+1}{3}$, puis, $u(t)=\dfrac{3}{2e^{\frac{-1}{4}t}+1}$

c) D'après A) la taille de la population tend vers 300 individus quand *t* tend vers $+\infty$