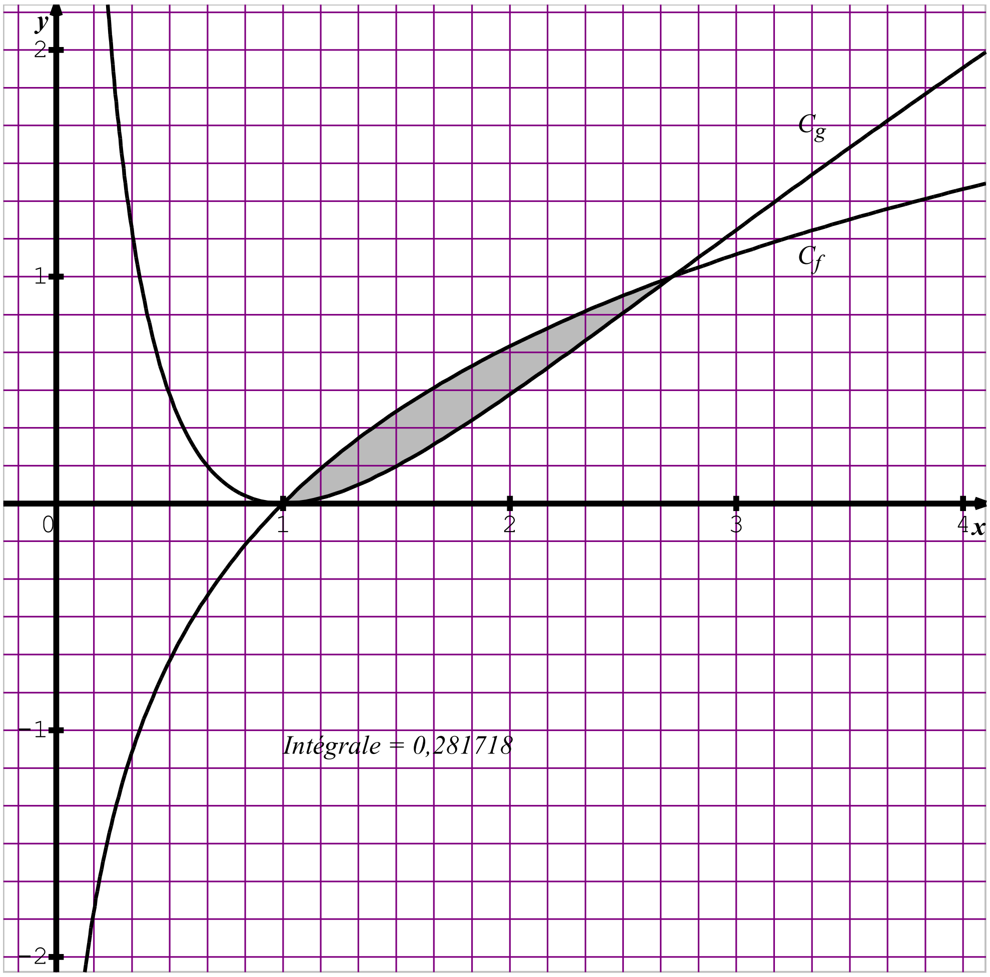
Table des matières

Exercice 1



1) f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln x$ et g par $g(x) = (\ln x)^2$

$$I = \int_1^e \ln x \,\mathrm{d}x = \int_1^e f(x)\,\mathrm{d}x \text{ et } J = \int_1^e (\ln x)^2 \mathrm{d}x = \int_1^e g(x)\,\mathrm{d}x.$$

a) La fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = x \ln x - x$ est définie et dérivable sur cet intervalle,

et, pour tout $x > 0$, on a: $F'(x) = (1\times\ln x + x\times \frac{1}{x}) - 1 = \ln x$.

F est donc une primitive de la fonction ln.

On en déduit: $I = F(\mathrm{e}) - F(1) = \mathrm{e}\times\ln(\mathrm{e}) - \mathrm{e} - (1\times\ln(1) - 1) = 1$

b) Calcul de J

On pose $\begin{cases} u(x)=(\ln x)^2 \\ v'(x)=1 \end{cases}$, on a alors: $\begin{cases} u'(x)=2\times\dfrac{1}{x}\times\ln x \\ v(x)=x \end{cases}$.

Les fonctions u et v sont définies et dérivables sur [1; e] et leurs dérivées u' et v' sont continues sur cet intervalle, d'où, on peut appliquer la formule d'intégration par parties.

$$J = \left[(\ln x)^2 \times x\right]_1^e - \int_1^e \frac{2\ln x}{x}\times x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e} - 0 - 2\int_1^e \ln x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e} - 2I$$

Remarque:

En écrivant $\begin{cases} u(x)=\ln x \\ v'(x)=\ln x \end{cases}$, d'où, $\begin{cases} u'(x)=\dfrac{1}{x} \\ v(x)=x\ln x - x \end{cases}$, on a:

$$J = \left[(x\ln x - x)\times \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{(x\ln x - x)}{x} \mathrm{d}x = 0 - \int_1^e \ln x \, \mathrm{d}x + \int_1^e 1 \, \mathrm{d}x = -I + \mathrm{e} - 1$$

c) D'où, $J = \mathrm{e} - 2$

d) Sur [1; e], on sait: $0 \leqslant \ln x \leqslant 1$, d'où, $0 \leqslant (\ln x)^2 \leqslant \ln x \leqslant 1$

Comme $f(x) \geqslant g(x)$ sur [1; e], l'aire A (en $u.a$) comprise entre C_f et C_g est $A = \int_1^e (f(x) - g(x)) \, \mathrm{d}x = I - J$ par linéarité de l'intégrale.

$A = 1 - (\mathrm{e} - 2) = 3 - \mathrm{e}$

2) On a: $M(x; f(x))$ et $N(x; g(x))$.

Comme $f(x) \geqslant g(x)$ sur [1; e], on a: $MN = f(x) - g(x) = \ln x - (\ln x)^2 = d(x)$

On étudie les variations de la fonction d sur [1; e].

$d'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2\ln x}{x} = \dfrac{1-2\ln x}{x}$.

$d'(x) > 0$ si et seulement si $x \in [1; \mathrm{e}]$ et $1 - 2\ln x > 0$

Soit $\ln x < \dfrac{1}{2}$, d'où, $x < \sqrt{\mathrm{e}}$. $\qquad d(\sqrt{\mathrm{e}}) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$

x	1		$\sqrt{\mathrm{e}}$		e
$f'(x)$		+	0	–	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0

La valeur maximale de MN est $\dfrac{1}{4}$ (unité graphique)

Exercice 2

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. $A(1;\,1;\,0)$, $B(1;\,2;\,1)$ et $C(3;\,–1;\,2)$

1 a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}$. Comme il n'existe aucun réel k tel que $0\times k = 2$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Les points A, B, C ne sont pas alignés.

b) Ils forment donc un plan dont une équation cartésienne est de la forme $ax + by + cz + d = 0$

Les coordonnées de A, de B et de C doivent vérifier cette équation.

Dans cet exercice, l'équation est donnée, il suffit de vérifier pour ces trois points, sinon, on résout le système:

$(S)\begin{cases}a+b+d=0\\a+2b+c+d=0\\3a-b+2c+d=0\end{cases}\begin{pmatrix}L_1\\L_2\\L_3\end{pmatrix}$ On garde L_1, on fait L_2-L_1 et $3L_1-L_3$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+d=0\\b+c=0\\4b-2c+2d=0\end{cases}\begin{pmatrix}L_1\\L_2\\L_3\end{pmatrix}$ De L_2, on tire: $b = –c$, puis, dans L_3, $d = –3b$ et dans L_1, $a = 2b$.

En prenant $b = 1$, on a: $2x + y – z – 3 = 0$est une équation de (ABC).

2) (P) et (Q) d'équations respectives: $x + 2y – z – 4=0$ et $2x + 3y – 2z – 5 = 0$

un vecteur normal de (P) est: $\overrightarrow{n_P}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ et un vecteur normal de (Q) est: $\overrightarrow{n_Q}\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}$.

Ces vecteurs n'étant pas colinéaires, les plans (P) et (Q) sont sécants en une droite $(\mathscr{D})$

On obtient le système: $\begin{cases}x+2y-z-4=0\\2x+3y-2z-5=0\end{cases}$. On pose $z = t$ et on obtient: $\begin{cases}x+2y=4+t\\2x+3y=2t+5\\z=t\end{cases}\begin{pmatrix}L_1\\L_2\\L_3\end{pmatrix}$

En faisant $2L_1-L_2$, on a: $\begin{cases}x+2y=4+t\\y=3\\z=t\end{cases}$ et enfin, $\begin{cases}x=-2+t\\y=3\\z=t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

3) Un point Ω appartient aux trois plans (ABC), (P) et (Q) si et seulement si il appartient à $(\mathscr{D})$ et à (ABC).

On a donc: $\begin{cases}x=-2+t\\y=3\\z=t\\2x+y-z-3=0\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$, ce qui mène à: $2(–2 + t) + 3 – t – 3 = 0$, puis, $t = 4$.

L'intersection des trois plans (ABC), (P) et (Q) est le point Ω de paramètre 4 dans le système paramétrique de$(\mathscr{D})$ trouvé au 2), soit, $\Omega(2;\,3;\,4)$

4) Distance de A à $(\mathscr{D})$.

Une méthode:

La distance de A à $(\mathscr{D})$ est la distance minimale AM où $M \in (\mathscr{D})$.

On calcule $AM^2 = f(t)$

$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} -3+t \\ 2 \\ t \end{pmatrix}$ et $f(t) = t^2 - 6t + 9 + 4 + t^2 = 2t^2 - 6t + 13$

f est un polynôme du second degré qui atteint son minimum en $t = \frac{3}{2}$.

$f(\frac{3}{2}) = ... = \frac{17}{2}$.

La distance minimale est: $d_{min} = \sqrt{\frac{17}{2}} = \frac{\sqrt{34}}{2}$

Une autre méthode:

La distance de A à $(\mathscr{D})$ est la distance AH où H est le projeté orthogonal de A sur $(\mathscr{D})$, c'est-à-dire, le point de $(\mathscr{D})$ tel que $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{\Omega H} = 0$.

$\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} t-3 \\ 2 \\ t \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\Omega H} \begin{pmatrix} t-4 \\ 0 \\ t-4 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{\Omega H} = 0$ si et seulement si $(t-3)(t-4) + 0 + t(t-4) = 0$ si et seulement si $(t-4)(2t-3) = 0$

La solution $t = 4$ est exclue (point Ω),

H est donc le point de paramètre $\frac{3}{2}$ d'où $\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $AH = \sqrt{\frac{9}{4}+4+\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{34}}{2}$

Une autre méthode:

D'après le système du 2), le vecteur $\vec{d} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $(\mathscr{D})$ et le projeté orthogonal de A sur $(\mathscr{D})$ est le point de $(\mathscr{D})$ vérifiant: $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} = 0$ ce qui mène à $(t-3) + 0 + t = 0$, soit, $t = \frac{3}{2}$ ....

Une autre méthode:

On cherche dans le plan déterminé par $(\mathscr{D})$ et A, un vecteur $\vec{n}$ normal à $(\mathscr{D})$, et dans ce plan, on sait: (cf. programme de première)

$d(A,(\mathscr{D})) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$ où M est un point de $(\mathscr{D})$.

On peut prendre Ω (voir le 3)) ou un autre point: par exemple $D(-2 ; 3; 0)$

Plan déterminé par $(\mathscr{D})$ et A: $M(x; y; z) \in P(A; \mathscr{D})$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} = \alpha \vec{d} + \beta \overrightarrow{A\Omega}$

$\begin{cases} x-1=\alpha+\beta \\ y-1=2\beta \\ z=\alpha+4\beta \end{cases}$, en éliminant α et β on trouve: $2x + 3y - 2z - 5 = 0$ (C'est le plan (Q))

Un vecteur $\vec{n}$ normal à $(\mathscr{D})$ et vecteur directeur de (Q) vérifie:

$(\alpha + \beta)\times 1 + 2\beta\times 0 + (\alpha + 4\beta)\times 1 = 0$, soit: $2\alpha + 5\beta = 0$ On peut prendre $\alpha = 5$ et $\beta = -2$

d'où $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{A\Omega}\cdot\vec{n} = 3 - 8 - 12 = -17$ et $\|\vec{n}\| = \sqrt{34}$, d'où, $d(A,(\mathscr{D})) = \dfrac{17}{\sqrt{34}} = \dfrac{\sqrt{34}}{2}$

(En prenant le point $D(-2; 3; 0)$, on a: $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\cdot\vec{n} = -9 - 8 + 0 = -17$, etc.)

Exercice 3

Loi exponentielle de paramètre λ. Pour $t \geqslant 0$, $P(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

R est définie sur $[0; +\infty[$ par $R(t) = P(X > t) = 1 - P(X \leqslant t)$

1) R.O.C.

a) $P(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = -\mathrm{e}^{-\lambda t} - (-1) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$ et $R(t) = 1 - P(X \leqslant t) = 1 - (1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$

b) $P_{(X>t)}(X>t+s) = \dfrac{P(X>t)\cap(X>t+s)}{P(X>t)}$.

Or, comme l'ensemble $(X > t + s) \subset (X > t)$, on a: $(X > t + s) \cap (X > t) = (X > t + s)$

Par conséquent, $P_{(X>t)}(X>t+s) = \dfrac{P(X>t+s)}{P(X>t)} = \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+s)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} = \mathrm{e}^{-\lambda s}$ C.Q.F.D.

2) $\lambda = 0{,}00026$

a) $P(X \leqslant 1\,000) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}00026\times 1000} = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}26} \approx 0{,}23$ à 0,01 par excès

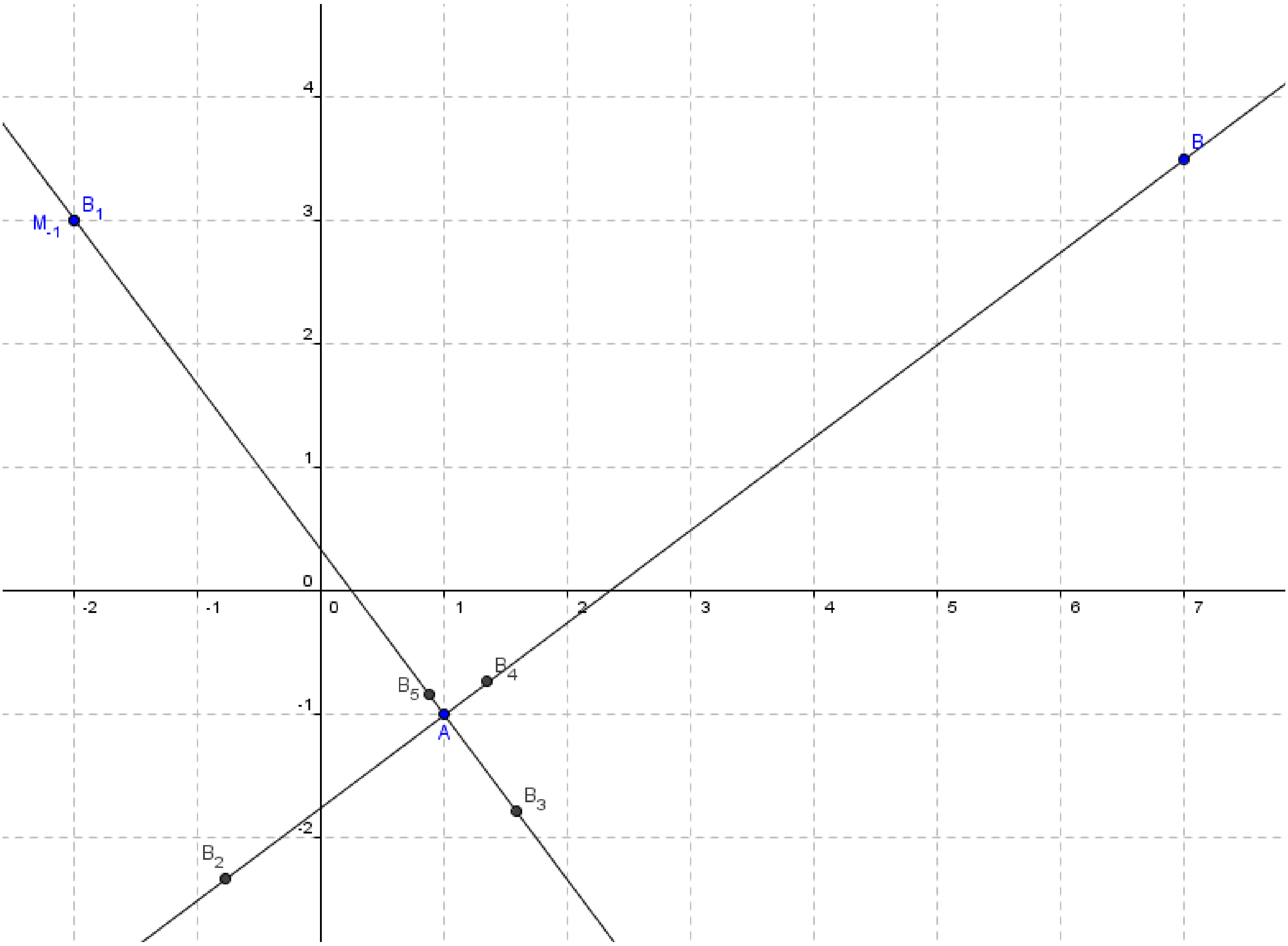
$P(X > 1\,000) = \mathrm{e}^{-0{,}26} \approx 0{,}77$ à 0,01 par défaut

b) On cherche $P_{(X>1000)}(X>2000) = P(X > 1000) = \mathrm{e}^{-0{,}26}$ d'après les questions précédentes.

c) On cherche $P_{(X>2000)}(X\leqslant 3000)$

L'événement contraire est l'agenda n'est pas en panne après 3 000 heures sachant qu'il a fonctionné plus de 2000 heures, on a alors: $P_{(X>2000)}(X>3000) = P(X > 1000)$ et $P_{(X>2000)}(X\leqslant 3000) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}26}$

Exercice 4 (spécialité)



1) (d) a pour équation $4x + 3y = 1$

Il est évident que le point $A(1; -1)$ est un point de (d).

On résout dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation: $4x + 3y = 1$, or, $4\times1 + 3\times(-1) = 1$, d'où,

$4x + 3y = 1 \Leftrightarrow 4x + 3y = 4\times1 + 3\times(-1) \Leftrightarrow 4(x-1) = 3(-y-1)$

3 et 4 étant premiers entre eux, on a d'après le théorème de Gauss, $x - 1$ est un multiple de 3.

Il existe $k \in \mathbb{Z}$, $x - 1 = 3k$, puis, $4\times3k = 3(-y-1)$, donc, $y = -4k - 1$, ...

Réciproquement:

Les points $M_k\,(3k+1, -4k-1)$ avec $k \in \mathbb{Z}$ sont des points à coordonnées entières et appartiennent à (d).

2) Le rapport de la similitude directe de centre A qui transforme B en $M_{-1}\,(-2, 3)$ est $\rho = \dfrac{AM}{AB} = \left|\dfrac{z_{\overrightarrow{AM}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right|$

L'angle est donné par $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = \arg \dfrac{z_{\overrightarrow{AM}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} = \arg \dfrac{-3+4\mathrm{i}}{6+\dfrac{9}{2}\mathrm{i}} = \arg \dfrac{-6+8\mathrm{i}}{12+9\mathrm{i}}$

Or, $\dfrac{-6+8\mathrm{i}}{12+9\mathrm{i}} = \dfrac{(-6+8\mathrm{i})(12-9\mathrm{i})}{225} = ... = \dfrac{2}{3}\mathrm{i}$

On en déduit: $\rho = \frac{2}{3}$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$

Remarque: $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$, soit, $AM = \sqrt{9+16} = 5$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\\frac{9}{2}\end{pmatrix}$, soit, $AB = \sqrt{36+\frac{81}{4}} = \frac{15}{2}$ $\rho = \frac{2}{3}$

3) s a pour écriture complexe $z' = \frac{2}{3}\mathrm{i}z + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}\mathrm{i}$

On reconnaît l'écriture d'une similitude directe.

L'affixe de $s(A)$ est $\frac{2}{3}\mathrm{i}(1-\mathrm{i}) + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}\mathrm{i} = 1 - \mathrm{i}$

$s(A) = A$

s est donc la similitude directe de centre A et de rapport $\frac{2}{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$

4) $B_1 = s(B) = M_{-1}$ d'après les 2) et 3)

a) Comme $[AB_{n+1}]$ est l'image de $[AB_n]$ par s, on a: $AB_{n+1} = \frac{2}{3}\ AB_n$

b) La suite des longueurs AB_n est donc une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $AB = \frac{15}{2}$

d'où, $AB_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{15}{2}$

On cherche n_0 tel que $n \geqslant n_0$ implique $AB_n \leqslant 10^{-2}$

On a donc: $n \ln \frac{2}{3} \leqslant \ln \frac{1}{750}$. Comme $\ln \frac{2}{3} < 0$, il vient: $n > \dfrac{\ln \frac{1}{750}}{\ln \frac{2}{3}}$ $\qquad n_0 = 17$

c) Comme l'angle de la similitude est $\frac{\pi}{2}$, la composée $s \circ s$ est une similitude directe de centre A et d'angle π.

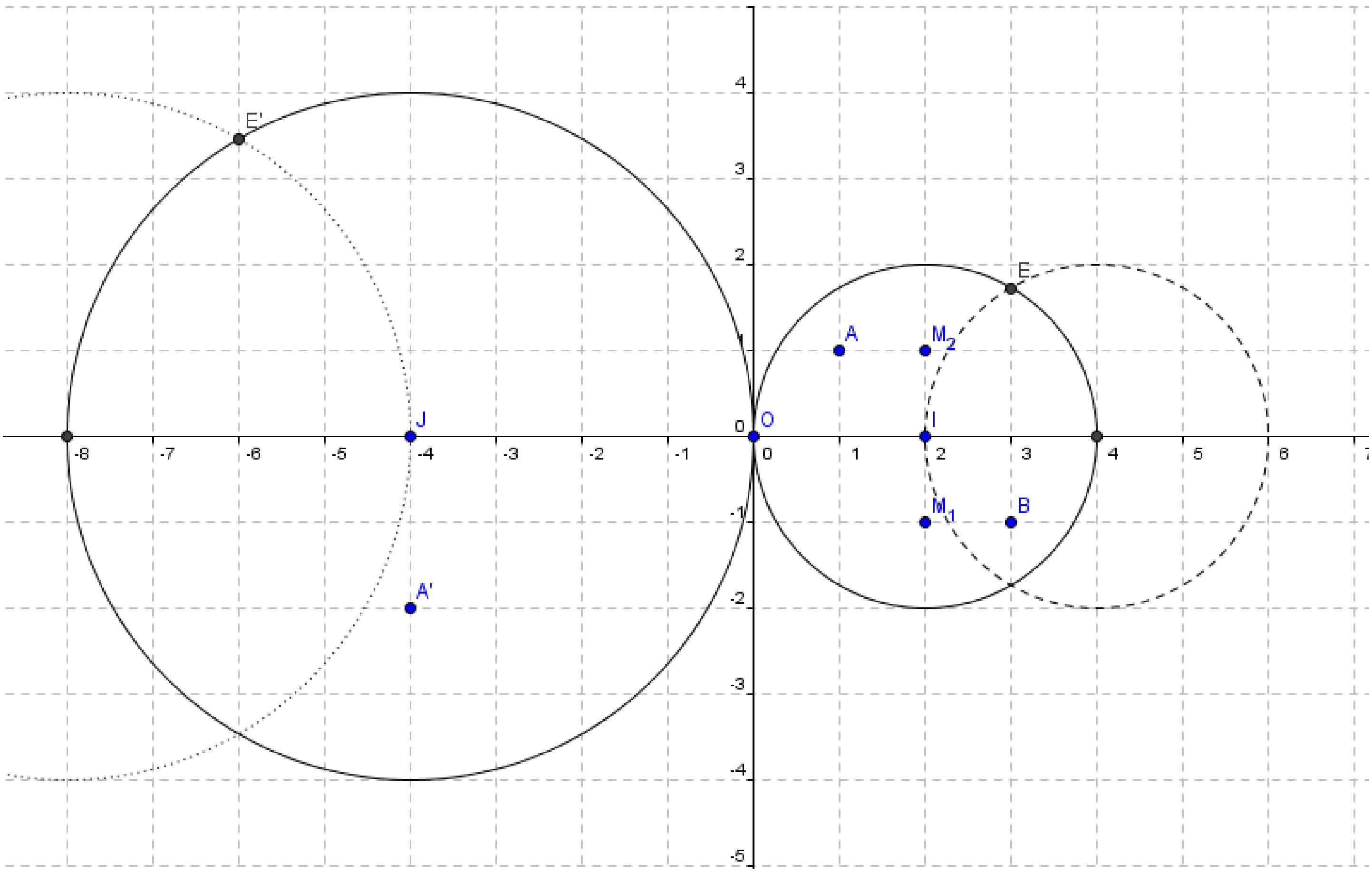
On a alors, $\widehat{B_{n+2}AB_n} = \pi$.

L'ensemble des entiers n pour lesquels A, B_1 et B_n sont alignés est l'ensemble des entiers naturels impairs.

Exercice 4 (non spécialité)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$
$A(1+\mathrm{i})$, $B(3-\mathrm{i})$, $I(2)$
À $M(z)$, on associe $M'(z')$ tel que $z' = z^2 - 4z$.

2) l'affixe de A' est $(1+\mathrm{i})^2 - 4 - 4\mathrm{i} = \ldots = -4 - 2\mathrm{i}$
Celle de B' est $(3-\mathrm{i})^2 - 12 + 4\mathrm{i} = \ldots = -4 - 2\mathrm{i}$
A et B ont les mêmes images.



3) Les points qui ont pour image le point d'affixe –5 ont leurs affixes solutions de $z^2 - 4z + 5 = 0$

$z^2 - 4z + 5 = 0$ si et seulement si $(z-2)^2 + 1 = 0$ si et seulement si $(z-2)^2 = -1 = i^2$

On a deux points d'affixes conjuguées: $z_1 = 2 - i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 2 + i$

(ou calcul de $\Delta = -4 = 4i^2 = (2i)^2$ ...)

4 a) $z' + 4 = z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2$

b) On en déduit: $|z'+4| = |(z-2)^2| = (|z-2|)^2$ et $\arg(z' + 4) = \arg(z-2)^2 = 2\arg(z-2)$ $[2\pi]$

c) Si $M(z)$ décrit $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon 2, on a: $|z-2| = 2$, d'où, $|z'+4| = 4$

M' est sur le cercle de centre J d'affixe –4 et de rayon 4

On a aussi: $z = 2 + 2\,e^{i\theta}$ *où* $\theta \in [0; 2\pi[$, *et, donc,* $z' = -4 + 4\,e^{2i\theta}$

5) $E(2 + 2\,e^{i\frac{\pi}{3}})$

a) La distance IE est donnée par $|z_E - z_I| = \left|2e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 2$

Une mesure en radians de $(\vec{u}, \overrightarrow{IE})$ est donnée par $\arg(z_E - z_I) = \arg(2\,e^{i\frac{\pi}{3}}) = \frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$

b) D'après la question 4) $JE' = 4$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{JE'}) = \frac{2\pi}{3}$

c) N'importe quelle construction permettant de placer sur le cercle de centre J et de rayon 4, le point E'.

On peut reporter deux fois le rayon à partir de O

On peut se servir des lignes trigonométriques avec $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, ...