Index

EXERCICE 1 6 points Commun à tous les candidats

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A :

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = e^{-x}$.

1. Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ *par* $u(x) = xe^{-x}$ *est une solution de l'équation différentielle (E).*

2. On considère l'équation différentielle (E') : $y' + y = 0$. *Résoudre l'équation différentielle (E').*

3. Soit v une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. *Montrer que la fonction v est une solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction* $v - u$ *est solution de l'équation différentielle (E').*

4. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

5. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

Partie B :

On considère la fonction f_k *définie sur l'ensemble* $\mathbb{R}$ *des nombres réels par* $f_k(x) = (x + k)e^{-x}$ *où k est un nombre réel donné.*

On note $\mathscr{C}_k$ *la courbe représentative de la fonction* f_k *dans un repère orthogonal.*

1. Montrer que la fonction f_k *admet un maximum en* $x = 1 - k$.

2. On note M_k *le point de la courbe* $\mathscr{C}_k$ *d'abscisse* $1 - k$. *Montrer que le point* M_k *appartient à la courbe* Γ *d'équation* $y = e^{-x}$.

3. Sur le graphique donné en annexe 1 (à rendre avec la copie), le repère est orthogonal mais l'unité sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées ainsi que les noms des courbes n'apparaissent pas. Sur ce graphique, on a tracé deux courbes :

• la courbe Γ *d'équation* $y = e^{-x}$;

• la courbe $\mathscr{C}_k$ *d'équation* $y = (x + k)e^{-x}$ *pour un certain nombre réel k donné.*

a. Identifier les courbes et les nommer sur l'annexe 1 (à rendre avec la copie).

b. En expliquant la démarche utilisée, déterminer la valeur du nombre réel k correspondante ainsi que l'unité graphique sur chacun des axes.

4. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^2 (x+2)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$. *Donner une interprétation graphique de cette intégrale.*

Partie A

1) (E) : $y' + y = \mathrm{e}^{-x}$.

Soit $u : x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$

La fonction u est le produit des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^{-x}$ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, d'où, u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et, pour tout x réel, $u'(x) = 1\times e^{-x} + x\times(-e^{-x})$.

On a donc : $u'(x) + u(x) = e^{-x} - x\times e^{-x} + x\times e^{-x} = e^{-x}$

Conclusion : la fonction u est solution de (E).

2) (E′) : $y' + y = 0$ est équivalente à $y' = -y$ qui est de la forme $y' = ay$ avec $a = -1$.

On sait que les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-x}$ où $C \in \mathbb{R}$.

3) $\begin{cases} v & \text{solution de (E)} \\ u & \text{solution de (E)} \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} v'(x)+v(x)=e^{-x} \\ u'(x)+u(x)=e^{-x} \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} v'(x)-u'(x)+v(x)-u(x)=0 \\ u'(x)+u(x)=e^{-x} \end{cases}$.

Or, $v'(x) - u'(x) = (v - u)'(x)$, et, $v(x) - u(x) = (v - u)(x)$

d'où, $\begin{cases} v & \text{solution de (E)} \\ u & \text{solution de (E)} \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} (v-u)'(x)+(v-u)(x)=0 \\ u'(x)+u(x)=e^{-x} \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} v-u & \text{solution de (E ')} \\ u & \text{solution de (E)} \end{cases}$

4) Les solutions de (E) sont, d'après 3/, les fonctions v telles que $v - u$ sont les solutions de (E ′)

D'après le 2) $v - u : x \mapsto Ce^{-x}$ où $C \in \mathbb{R}$.

Comme $u(x) = xe^{-x}$, on obtient :

les solutions de (E) sont les fonctions $v : x \mapsto xe^{-x} + Ce^{-x}$ où $C \in \mathbb{R}$.

5) La solution g qui vérifie $g(0) = 2$ est telle que $\begin{cases} g(x)=xe^{-x}+Ce^{-x} \\ g(0)=2 \end{cases}$, d'où,

$0 + C\times 1 = 2$.

L'unique fonction qui vérifie $g(0) = 2$ est la fonction $g : x \mapsto xe^{-x} + 2e^{-x} = (x + 2)e^{-x}$

Partie B

1) On peut remarquer que les fonctions f_k sont les solutions de l'équation différentielle (E) de la partie A, et, par conséquent $f_k'(x) = e^{-x} - f_k(x) = e^{-x} - (x + k)e^{-x} = (1 - x - k)e^{-x}$

ou encore :

Dérivée d'un produit : $x \mapsto x + k$ et $x \mapsto e^{-x}$

$f_k'(x) = 1\times e^{-x} + (x + k)(-e^{-x}) = (1 - x - k)e^{-x}$

Puisque e^{-x} , le signe de la dérivée est celui de $1 - x - k$, soit :

$1 - x - k > 0$ si et seulement si $x < 1 - k$, et, $1 - x - k < 0$ si et seulement si $x > 1 - k$

La fonction f_k est strictement croissante sur $]-\infty ; 1 - k]$ et strictement décroissante sur $[1 - k ; +\infty[$.

La fonction admet un maximum qui vaut $f_k(1-k) = e^{-1+k} = \dfrac{e^k}{e}$

x	$-\infty$		$1-k$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_k(x)$		$\nearrow$	Max	$\searrow$	

2) Le point M_k a pour coordonnées $(1-k\,;f_k(1-k))$.

Comme $f_k(1-k) = e^{-1+k}$ le point est un point de Γ d'équation $y = e^{-x}$

3) On reconnaît la courbe Γ (en noir), courbe représentant une exponentielle décroissante.

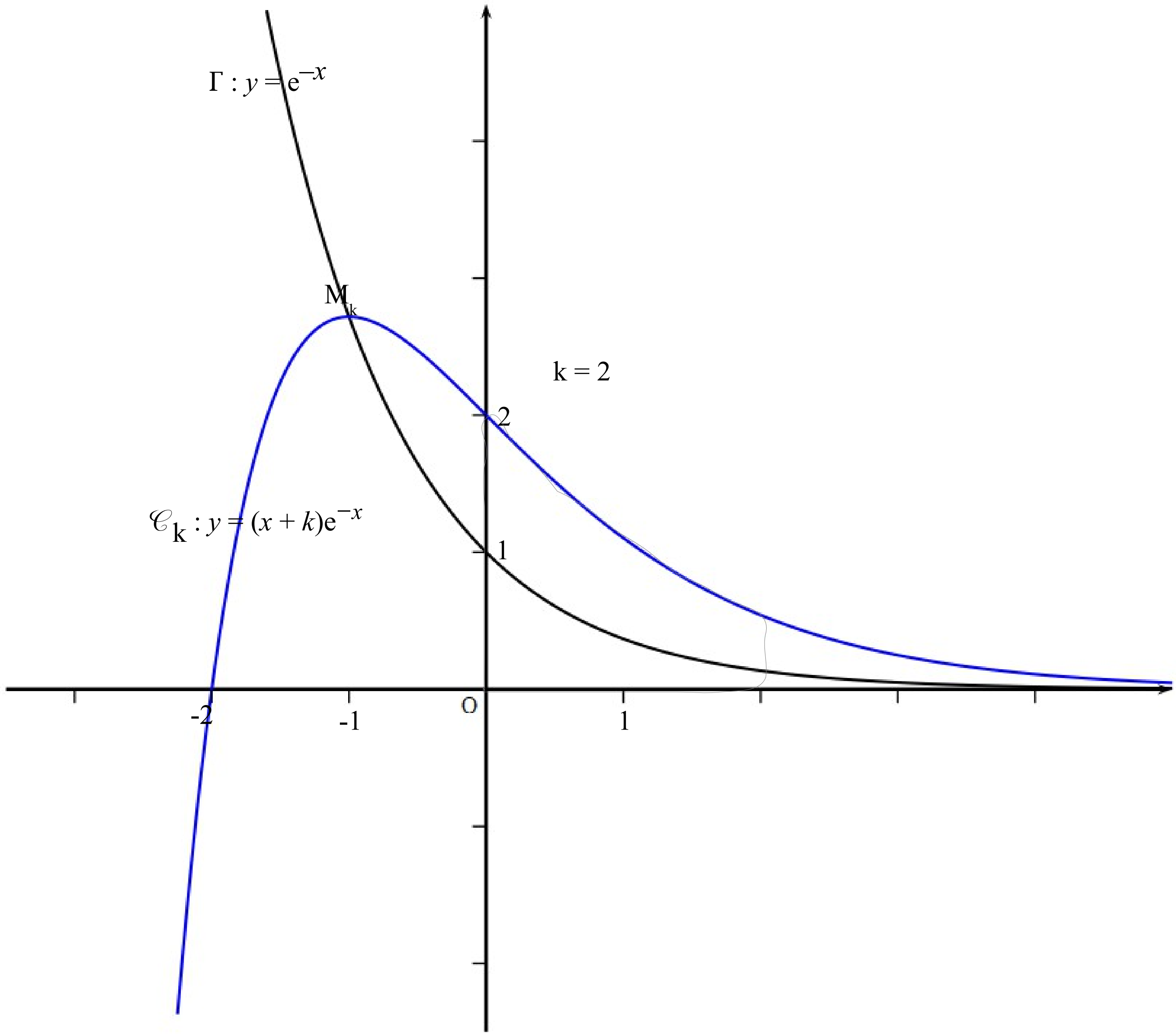
Γ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 1 (ce qui donne l'unité en ordonnées).

La courbe courbe $\mathscr{C}_k$ représentant la fonction f_k coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 2, d'où, $k = 2$.

La courbe courbe $\mathscr{C}_k$ représentant la fonction f_k coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $-k = -2$,

Le maximum est atteint en $1 - 2 = -1$.
Le point d'intersection des deux courbes a pour abscisse -1 et pour ordonnée e.

La fonction f_2 représentée est la fonction g du 5 de la partie A.



4) Calcul par intégration par parties de $I = \int_0^2 (x+2)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

Soit $\begin{cases} u(x) = x+2 \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases}$, u est dérivable, et, $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$,

u, v sont des fonctions dérivables sur [0 ; 2] et leurs dérivées sont continues.
On peut donc faire une intégration par parties :

$$I = \int_0^2 (x+2)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[(x+2)\times(-e^{-x})\right]_0^2 - \int_0^2 1\times(-\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x$$

$$I = -4\mathrm{e}^{-2} + 2 + \int_0^2 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^2 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^2 = -\mathrm{e}^{-2} + 1$$

$I = 2 - 4e^{-2} + 1 - e^{-2} = 3 - 5e^{-2}$

Interprétation graphique :

Comme la fonction $f2$ est continue et positive sur [0 ; 2], le nombre I est la mesure, en unité d'aire, de l'aire de la surface limitée par Γ, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$ (partie hachurée)

EXERCICE 2 ***5 points*** ***Commun à tous les candidats***

1. Restitution organisée de connaissances

Démontrer à l'aide de la définition et des deux propriétés ci-dessous que si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, alors elles sont convergentes et elles ont la même limite.

***Définition** : deux suites sont adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre est décroissante et la différence des deux converge vers 0.*

***Propriété 1** : si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante alors pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant u_n$.*

***Propriété 2** : toute suite croissante et majorée converge ; toute suite décroissante et minorée converge.*

Dans la suite de cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

2. Dans les cas suivants, les suites (u_n) et (v_n) ont-elles la même limite ? Sont-elles adjacentes ? Justifier les réponses.

a. $u_n = 1-10^{-n}$ et $v_n = 1+10^{-n}$;

b. $u_n = \ln(n+1)$ et $v_n = \ln(n+1)+\dfrac{1}{n}$;

c. $u_n = 1-\dfrac{1}{n}$ et $v_n = 1+\dfrac{(-1)^n}{n}$

3. On considère un nombre réel a positif et les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout nombre entier naturel n non nul par : $u_n = 1-\dfrac{1}{n}$ et $v_n = \ln\left(a+\dfrac{1}{n}\right)$

Existe-t-il une valeur de a telle que les suites soient adjacentes ?

1) R.O.C.

Soit (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante.

(v_n) est décroissante, d'où, $v_n \leqslant v_0$.

D'après la propriété 1, on sait que pour tout n, $u_n \leqslant v_n$.

Comme $v_n \leqslant v_0$, la suite (u_n) est donc majorée par v_0.

La suite (u_n) croissante et majorée par v_0 , converge vers un réel l, d'après la propriété 2.

On a aussi : $v_n \geqslant u_n \geqslant u_0$, d'où, la suite (v_n) minorée par u_0.

La suite (v_n) décroissante et minorée par u_0 converge vers un réel l' , d'après la propriété 2.

La suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ converge vers 0 d'après la définition des suites adjacentes.

Or, comme l et l' sont des réels, la suite (w_n) converge vers $l' - l$.

L'unicité des limites impose : $l' - l = 0$, soit : $l = l'$.

Conclusion : les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la m^me limite.

2/ a) a. $u_n = 1-10^{-n}$ et $v_n = 1+10^{-n}$;

La suite de terme général $10^{-n} = \dfrac{1}{10^n} = \left(\dfrac{1}{10}\right)^n$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{10}$ décroissante qui converge vers 0.

On a par conséquent , les suites (u_n) et (v_n) convergent vers 1.

$u_{n+1} - u_n = 1 - \dfrac{1}{10^{n+1}} - 1 + \dfrac{1}{10^n} = \dfrac{9}{10^{n+1}}$ est positif donc (u_n) est croissante

On obtient aussi : $v_{n+1} - v_n = 1 + \dfrac{1}{10^{n+1}} - 1 - \dfrac{1}{10^n} = \dfrac{-9}{10^{n+1}}$, donc (v_n) est décroissante.

$v_n - u_n = \dfrac{2}{10^n}$ converge vers 0.

les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

b. $u_n = \ln(n+1)$ et $v_n = \ln(n+1) + \dfrac{1}{n}$;

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, on a :

les suites (u_n) et (v_n) divergent vers $+\infty$ et ces suites ne sont pas adjacentes.

c. $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$

Les suites de terme général $\dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{(-1)^n}{n}$ convergent vers 0, donc, les suites (u_n) et (v_n) convergent vers 1.

Comme la suite (v_n) est alternée, elle n'est ni croissante, ni décroissante et par conséquent, les suites (u_n) et (v_n) ne sont pas adjacentes.

3. On considère un nombre réel a positif et les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout nombre entier naturel n non nul par : $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \ln\left(a + \dfrac{1}{n}\right)$

Existe-t-il une valeur de a telle que les suites soient adjacentes ?

La suite (u_n) est une suite croissante (voir 2b))

$a \geqslant 0$.

La suite de terme général $a + \dfrac{1}{n}$ est décroissante à termes strictement positifs, et, comme la fonction ln est croissante sur $]0 ; +\infty[$, la suite (v_n) est décroissante.

Il reste à prouver que la suite (v_n) peut converger vers $1 = \ln e$ pour un réel a positif ou nul.

On doit donc avoir la suite $a + \dfrac{1}{n}$ qui converge vers e puisque la fonction ln est continue.

lorsque $a = e$, les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

EXERCICE 3 4 points Commun à tous les candidats.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).

Pour chaque question, trois réponses sont proposées, une seule est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, le numéro de la question suivi de la réponse choisie. Il est attribué un point si la réponse est exacte, aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte ou une absence de réponse.

1. Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 7 sont blanches et 3 sont noires. On tire simultanément 3 boules de l'urne. La probabilité de tirer 2 boules blanches et 1 boule noire est égale à :

- $\dfrac{21}{40}$
- $\dfrac{7}{10} \times \dfrac{6}{9} \times \dfrac{1}{3}$
- $\dfrac{7}{10} \times \dfrac{7}{10} \times \dfrac{1}{3}$

Preuve :

Soit A l'événement " tirer 2 boules blanches et 1 boule noire "

L'univers Ω est l'ensemble des parties à 3 éléments pris parmi 10

on a : $\dbinom{10}{3}$ tirages simultanés de 3 boules prises parmi 10 , soit : card $(\Omega) = \dfrac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = 120$

Pour obtenir 2 boules blanches prises parmi 7 et 1 boule noire prise parmi 3, on a : $\dbinom{7}{2} \times \dbinom{3}{1} = \dfrac{7\times6}{2\times1} \times 3$ cas favorables, soit : card$(A) = 63$

Dans l'hypothèse d'équiprobabilité, on obtient : $\dfrac{63}{120} = \dfrac{21}{40}$.

2. De la même urne, on tire une boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne ; on procède ainsi à 5 tirages successifs avec remise. La probabilité d'avoir obtenu 3 boules noires et 2 boules blanches est égale à :

- $\dfrac{3^3\times7^2}{10^5}$
- $\dbinom{5}{2} \times \left(\dfrac{3}{10}\right)^2 \times \left(\dfrac{7}{10}\right)^3$
- $\dbinom{5}{2} \times \left(\dfrac{3}{10}\right)^3 \times \left(\dfrac{7}{10}\right)^2$

Preuve :

On reconnaît un schéma de Bernoulli en appelant Succès, le tirage d'une boule blanche de probabilité $\dfrac{7}{10}$ et Échec, celui d'une boule noire de probabilité $\dfrac{3}{10}$.

On répète 5 fois dans les mêmes conditions (avec remise) l'épreuve.

La variable X égale au nombre de boules blanches suit la loi binomiale de paramètres 5 et $\dfrac{7}{10}$.

On cherche la probabilité d'avoir $(X = 2)$ (ainsi, on a 2 boules blanches et 3 boules noires).

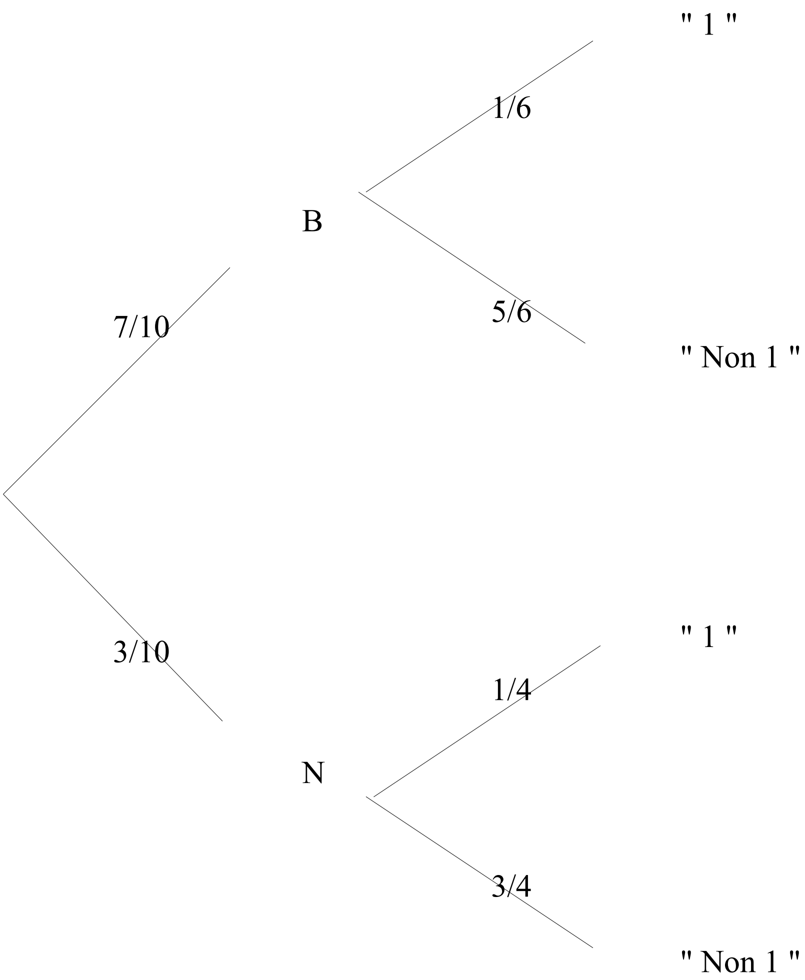
On a alors $P(X = 2) = \dbinom{5}{2} \times \left(\dfrac{7}{10}\right)^2 \times \left(\dfrac{3}{10}\right)^3$

3. De la même urne, on tire une seule boule. Si elle est blanche, on lance un dé cubique (dont les faces sont numérotées de 1 à 6). Si la boule est noire, on lance un dé tétraédrique (dont les faces sont numérotées de 1 à 4). On suppose les dés bien équilibrés. Le joueur gagne s'il obtient le numéro 1.
Sachant que le joueur a gagné, la probabilité qu'il ait tiré une boule blanche est égale à :

- $\dfrac{7}{60}$
- $\dfrac{14}{23}$
- $\dfrac{\frac{7}{10}\times\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}$

Preuve :

En faisant un arbre, on a :



Le joueur a gagné, lorsqu'il a obtenu le " 1 ", d'où, P(gagné) = $\dfrac{1}{6} \times \dfrac{7}{10} + \dfrac{1}{4} \times \dfrac{3}{10} = \dfrac{23}{120}$

Le joueur a tiré une boule blanche ET gagné a pour probabilité : P(B ∩ " 1 ") = $\dfrac{1}{6} \times \dfrac{7}{10} = \dfrac{7}{60}$.

$P_{\text{gagné}}(\text{Blanche}) = \dfrac{\dfrac{7}{60}}{\dfrac{23}{120}} = \dfrac{14}{23}$

4. On note X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. (λ étant un nombre réel strictement positif). La probabilité de l'événement (1 ⩽ X ⩽ 3) est égale à :

• $e^{-\lambda} - e^{-3\lambda}$ • $e^{-3\lambda} - e^{-\lambda}$ • $\dfrac{e^{-\lambda}}{e^{-3\lambda}}$

Preuve :

D'après les propriétés de la loi exponentielle, la probabilité d'avoir P($a \leqslant X \leqslant b$) est égale à :

$P(a \leqslant X \leqslant b) = \displaystyle\int_a^b \lambda e^{-\lambda x}\,dx$

On a donc : $P(1 \leqslant X \leqslant 3) = \displaystyle\int_1^3 \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_1^3 = -e^{-3\lambda} - (-e^{-\lambda}) = e^{-\lambda} - e^{-3\lambda}$

EXERCICE 4 ***5 points*** ***Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité***

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère le point A d'affixe 2 et le cercle $\mathscr{C}$ de centre O passant par A.

Dans tout l'exercice on note α le nombre complexe α = 1+i $\sqrt{3}$ et $\overline{\alpha}$ le nombre complexe conjugué du nombre complexe α.

1. a. Démontrer que $\alpha^2 - 4\alpha = 2\overline{\alpha} - 8$.

Évaluons la différence : $\alpha^2 - 4\alpha - 2\overline{\alpha} + 8$

$$\alpha^2 - 4\alpha - 2\overline{\alpha} + 8 = (1 + i\sqrt{3})^2 - 4(1 + i\sqrt{3}) - 2(1 - i\sqrt{3}) + 8$$

$$= 1 - 3 + 2i\sqrt{3} - 4 - 4i\sqrt{3} - 2 + 2i\sqrt{3} + 8 = 0$$ ce qui prouve l'égalité : $\alpha^2 - 4\alpha = 2\overline{\alpha} - 8$.

b. Démontrer que les points B et C d'affixes respectives α et $\overline{\alpha}$ appartiennent au cercle $\mathscr{C}$.

$OB = |\alpha|$ et $OC = |\overline{\alpha}|$

$$|\alpha| = |\overline{\alpha}| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = 2$$

Or, $\mathscr{C}$ est le cercle de centre O et de rayon $OA = 2$.

Conclusion : les points B et C d'affixes respectives α et $\overline{\alpha}$ appartiennent au cercle $\mathscr{C}$.

2. Soit D un point du cercle $\mathscr{C}$ d'affixe $2e^{i\theta}$ où θ est un nombre réel de l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.

a. Construire sur la figure donnée en annexe 2 (à rendre avec la copie) le point E image du point D par la rotation r de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

Construire le triangle équilatéral direct *ODE*.

b. Justifier que le point E a pour affixe $z_E = \alpha e^{i\theta}$.

Le point E image de D par la rotation de centre O a pour affixe z_E telle que : $z_E - z_O = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_D - z_O)$

Or, $e^{i\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$, d'où, $z_E - 0 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(2e^{i\theta} - 0)$

$z_E = (1+i\sqrt{3})e^{i\theta} = \alpha e^{i\theta}$.

3. Soient F et G les milieux respectifs des segments [BD] et [CE].

a. Justifier que le point F a pour affixe $z_F = \dfrac{\alpha}{2} + e^{i\theta}$.

F étant le milieu de $[BD]$, on a : $z_F = \dfrac{z_B+z_D}{2} = \dfrac{\alpha+2e^{i\theta}}{2} = \dfrac{\alpha}{2} + e^{i\theta}$.

b. On admet que le point G a pour affixe $z_G = \dfrac{\alpha e^{i\theta}+\overline{\alpha}}{2}$ (évident puisque G milieu de [EC] d'affixes respectives $\overline{\alpha}$ et $\alpha e^{i\theta}$.)

Démontrer que $\dfrac{z_G-2}{z_F-2} = \dfrac{\alpha}{2}$. On pourra utiliser la question 1. a.

En déduire que le triangle AFG est équilatéral.

$2(z_G - 2) = \alpha e^{i\theta} + \overline{\alpha} - 4$, or, $\overline{\alpha} - 4 = \dfrac{(\alpha^2-4\alpha)}{2}$ d'après 1.a.

$2(z_G - 2) = \alpha e^{i\theta} + \dfrac{(\alpha^2-4\alpha)}{2} = \alpha\left(e^{i\theta} + \dfrac{\alpha}{2} - 2\right)$

$z_F - 2 = \dfrac{\alpha}{2} + e^{i\theta} - 2$

Finalement : $2(z_G - 2) = \alpha(z_F - 2)$

D'où, $\dfrac{z_G-2}{z_F-2} = \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$, soit : $z_G - 2 = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_F - 2)$

G est l'image de F dans la rotation de centre A d'affixe 2 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
AFG est donc un triangle équilatéral.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on conjecture qu'il existe une position du point D, défini à la question 2, pour laquelle la longueur du coté AF du triangle AFG est minimale.
On admet que $AF^2 = 4 - 3\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$.
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-\pi ; +\pi]$ *par* $f(x) = 4 - 3\cos x + \sqrt{3}\sin x$.
Le tableau ci-dessous donne les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-\pi ; +\pi]$. *Compléter ce tableau de variations. Permet-il de valider la conjecture ? Justifier*

x	$-\pi$		$-\pi/6$		$5\pi/6$		π
f	7	$\searrow$	$(\sqrt{3}-1)^2$	$\nearrow$	$(\sqrt{3}+1)^2$	$\searrow$	7

$f(-\pi) = 4 - 3\cos(-\pi) + \sqrt{3}\sin(-\pi) = 7$

$f(-\frac{\pi}{6}) = 4 - 3\cos(-\frac{\pi}{6}) + \sqrt{3}\sin(-\frac{\pi}{6}) = 4 - 3\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\times(-\frac{1}{2}) = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}-1)^2$

$f(\frac{5\pi}{6}) = 4 - 3\cos(\frac{5\pi}{6}) + \sqrt{3}\sin(\frac{5\pi}{6}) = 4 - 3(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + \sqrt{3}\times\frac{1}{2} = 4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}+1)^2$

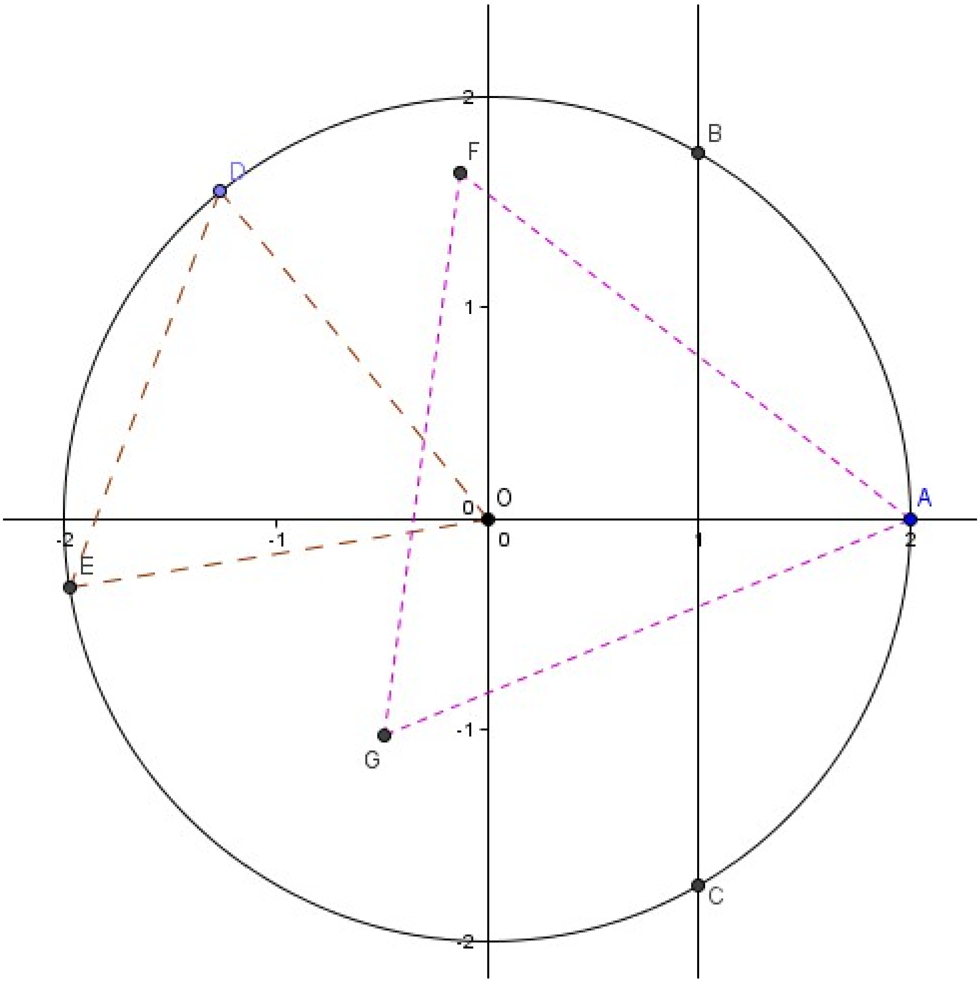
$f(\pi) = 4 - 3\cos\pi + \sqrt{3}\sin\pi = 7$

La fonction f admet un minimum en $-\frac{\pi}{6}$.
Cette fonction f modélise la distance au carré AF^2 qui est donc minimale lorsque $\theta = -\frac{\pi}{6}$.
Comme AF est positif, AF est minimale lorsque AF^2 est minimale et $AF = \sqrt{3} - 1$
Il existe une position du point D qui rend minimale la longueur AF. Dans ce cas l'affixe de D est $2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

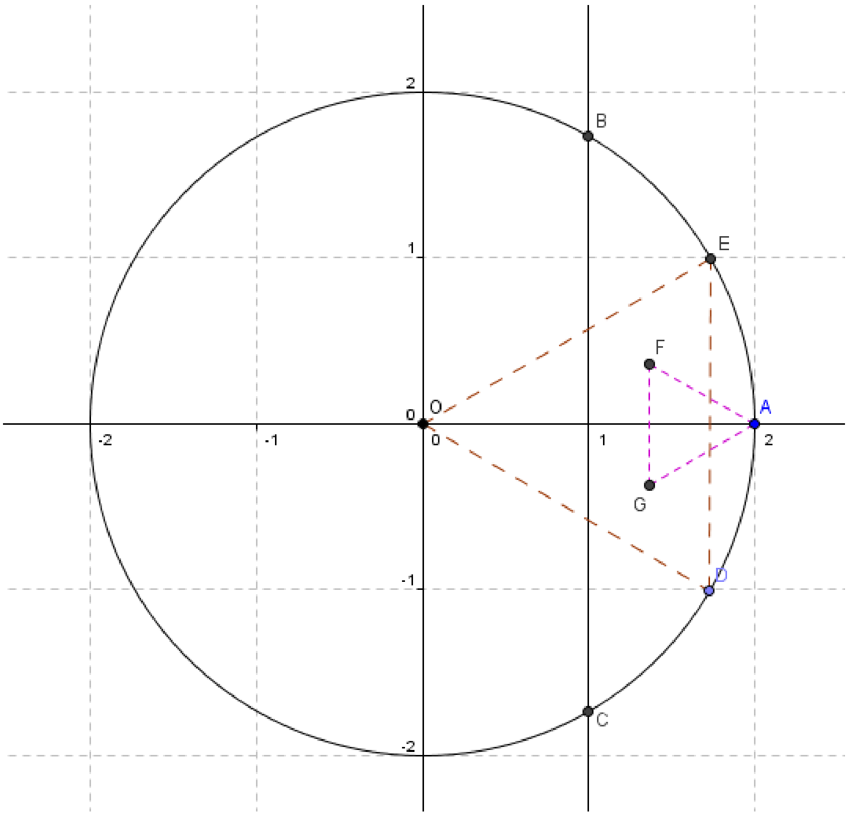
Complément :
Le calcul de AF^2 ne pose pas de difficulté.
On sait que F a pour affixe $\frac{\alpha}{2} + e^{i\theta}$, d'où, les coordonnées de $F(\frac{1}{2} + \cos\theta\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin\theta)$
A a pour coordonnées (2; 0).
On a donc : $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} \frac{-3}{2}+\cos\theta \\ \frac{\sqrt{3}}{2}+\sin\theta \end{pmatrix}$, puis $AF^2 = \frac{9}{4} - 3\cos\theta + \cos^2\theta + \frac{3}{4} + \sqrt{3}\sin\theta + \sin^2\theta$, et,
comme $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, il vient : $AF^2 = 4 - 3\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$.

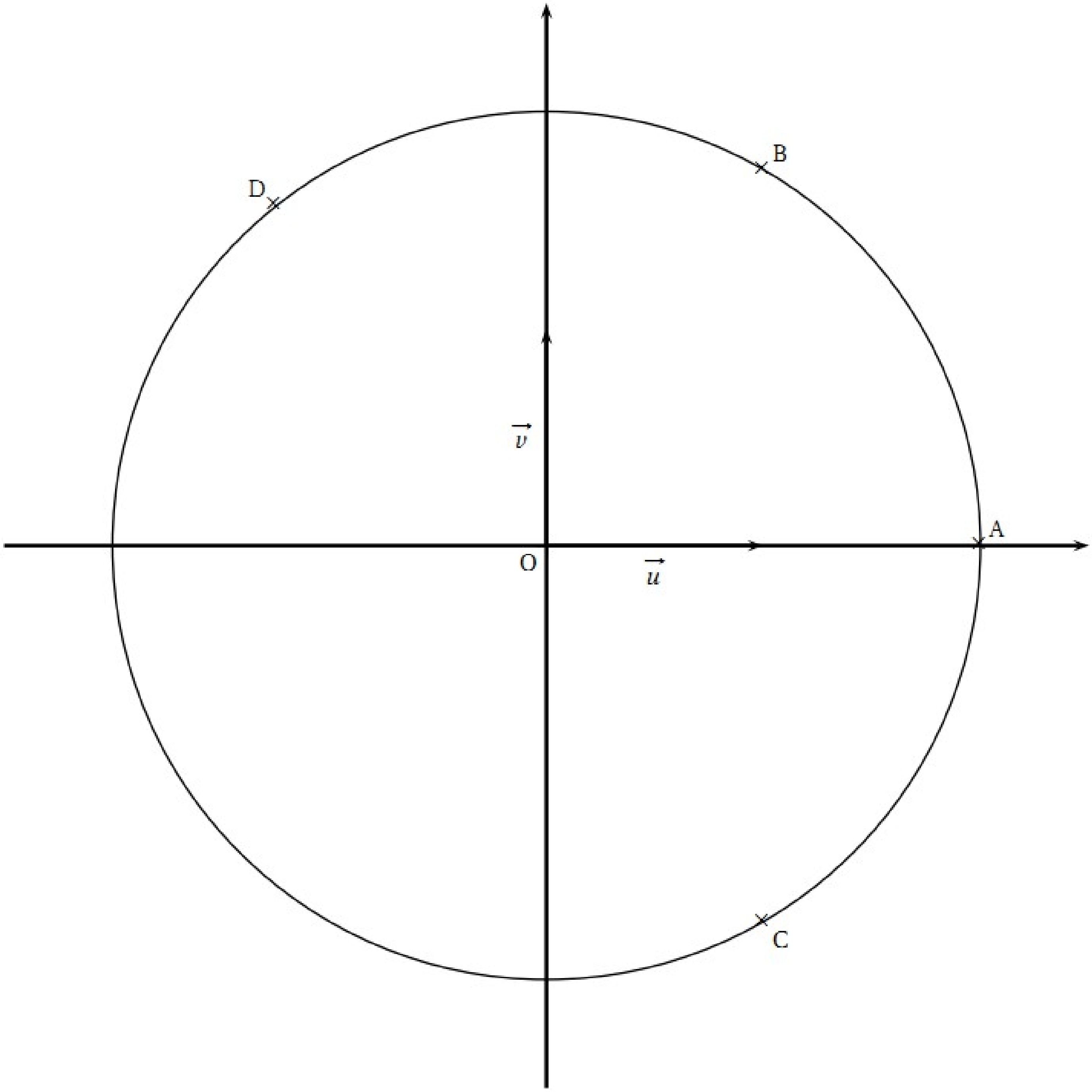
La dérivée $f'(x) = 3\sin x + \sqrt{3}\cos x = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x)$

$= \frac{1}{2\sqrt{3}}(\sin x\cos\frac{\pi}{6} + \cos x\sin\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\sin(x + \frac{\pi}{6})$



Position de D qui rend AF minimale




B
D
A
O
$\vec{u}$
$\vec{v}$
C