Index

Exercice 1 4 points Commun à tous les candidats

Dans une kermesse un organisateur de jeux dispose de 2 roues de 20 cases chacune.

La roue A comporte 18 cases noires et 2 cases rouges.

La roue B comporte 16 cases noires et 4 cases rouges.

Lors du lancer d'une roue toutes les cases ont la même probabilité d'être obtenues.

La règle du jeu est la suivante :

Le joueur mise 1 € et lance la roue A.

S'il obtient une case rouge, alors il lance la roue B, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.

S'il obtient une case noire, alors il relance la roue A, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.

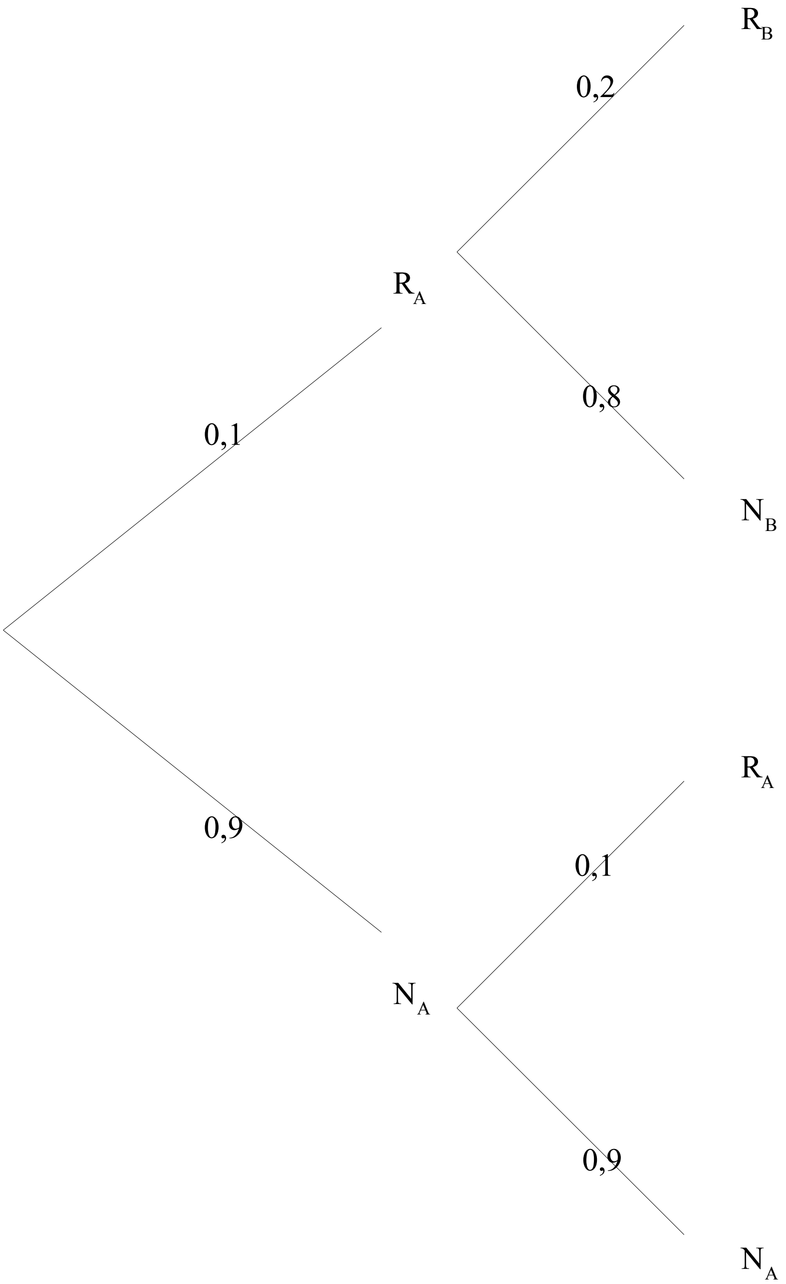
1) 1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
Les notations sur l'arbre sont évidentes ... (voir page suivante)

2. Soient E et F les évènements :
E : « à l'issue de la partie, les 2 cases obtenues sont rouges »
F : « à l'issue de la partie, une seule des deux cases est rouge ».
Montrer que p(E)= 0,02 et p(F) = 0,17.
$P(E) = P(R_A \cap R_B) = 0{,}1 \times 0{,}2 = 0{,}02$
$P(F) = P(R_A \cap N_B) + P(N_A \cap R_A)$ (Probabilité totale)
$= 0{,}1 \times 0{,}8 + 0{,}9 \times 0{,}1 = 0{,}08 + 0{,}09 = 0{,}17$

3. Si les 2 cases obtenues sont rouges le joueur reçoit 10 € ; si une seule des cases est rouge le joueur reçoit 2 € ; sinon il ne reçoit rien.
X désigne la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros du joueur (rappel le joueur mise 1 €).
a. Déterminer la loi de probabilité de X.
Le gain algébrique: 9 € si et seulement si E est réalisé
1 € si et seulement si F est réalisé
–1 € si et seulement si ni E, ni F sont réalisés , soit, l'obtention de deux cases noires.
Probabilité: 1 – 0,02 – 0,17 ou P(NN) = $0{,}9 \times 0{,}9 = 0{,}89$

k	–1	**1**	**9**	**Total**
$P_k = P(X = k)$	0,81	0,17	0,02	1
$k \times P_k$	–0,81	0,17	0,18	E(X) = –0,46

b. Calculer l'espérance mathématique de X et en donner une interprétation.
Voir calcul dans le tableau
Le joueur est ***perdant en moyenne*** de 46 centimes d'euro par partie jouée.



4. Le joueur décide de jouer *n* parties consécutives et indépendantes (*n* désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2)

a. Démontrer que la probabilité p_n qu'il lance au moins une fois la roue B est telle que $p_n = 1-(0,9)^n$.
"Lancer la roue B" ou "ne pas lancer la roue B" correspond à une épreuve de Bernoulli.
La répétition de *n* épreuves **indépendantes** permet d'affirmer que le nombre de lancer la roue B suit la loi binomiale de paramètres *n* et 0,1.
La probabilité de ne jamais lancer la roue B en *n* lancers est donc $(1 - 0,1)^n = 0,9^n$
Lancer au moins une fois la roue B: $p_n = 1-(0,9)^n$.

b. Justifier que la suite de terme général p_n est convergente et préciser sa limite.
Comme $-1 < 0,9 < 1$, $(0,9)_n$ tend vers 0 et p_n converge vers 1

c. Quelle est la plus petite valeur de l'entier *n* pour laquelle $p_n > 0,9$?
$1-(0,9)^n > 0,9$ si et seulement si $(0,9)^n < 0,1$ Comme ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$,
si et seulement si $n \ln 0,9 < \ln 0,1$ Comme $0,9 < 1$ alors $\ln 0,9 < 0$

si et seulement si $n > \dfrac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}9}$

Une valeur approchée de $\dfrac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}9}$ est 21,8

D'où, est la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $p_n > 0{,}9$ est 22

EXERCICE 2 3 points Commun à tous les candidats

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur l'intervalle]0 ;+∞[vérifiant l'équation différentielle (E) : $x f'(x) - (2x+1) f(x) = 8x^2$.

1. a. Démontrer que si f est solution de (E) alors la fonction g définie sur l'intervalle]0 ; +∞[par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ est solution de l'équation différentielle (E′) : $y' = 2y + 8$.

f, étant solution de (E) vérifie l'égalité $x f'(x) - (2x+1) f(x) = 8x^2$ avec $x > 0$

Soit: $x f'(x) - f(x) = 8x^2 + 2xf(x)$

Or, $g'(x) = \dfrac{f'(x) \times x - 1 \times f(x)}{x^2} = \dfrac{8x^2 + 2xf(x)}{x^2} = 8 + 2 \times \dfrac{f(x)}{x} = 8 + 2g(x)$.

La fonction g définie sur l'intervalle]0 ; +∞[est solution de l'équation différentielle
(E′) : $y' = 2y + 8$.

b. Démontrer que si h est solution de (E′) alors la fonction f définie par $f(x) = x\,h(x)$ est solution de (E).

Si $x \neq 0$ (pour pouvoir écrire $\dfrac{f(x)}{x} = h(x)$

h est solution de (E′) d'où, $h'(x) = 2h(x) + 8 = 2\dfrac{f(x)}{x} + 8$

Si $x \neq 0$ (pour pouvoir écrire $\dfrac{f(x)}{x} = h(x)$

Or, $f'(x) = 1 \times h(x) + x \times h'(x) = \dfrac{f(x)}{x} + x\left(2\dfrac{f(x)}{x} + 8\right)$

En multipliant les deux membres par x, il vient:

$xf'(x) = f(x) + 2xf(x) + 8x^2$,

ce qui prouve que f est solution de (E)

2. Résoudre (E′) et en déduire toutes les solutions de (E)

Reconnaître les équations de la forme $y' = ay + b$

La solution constante de (E') est la fonction $x \mapsto -4$

Les solutions de l'équation $y' = 2y$ sont les fonctions $x \mapsto C\,e^{2x}$ où $C \in \mathbb{R}$.

Les solutions de (E′) sont les fonctions: $x \mapsto C\,e^{2x} - 4$ où $C \in \mathbb{R}$.

D'après 1a)b), les solutions de (E) sont les fonctions f telles que $f(x) = xh(x)$ où h est solution de (E′), d'où, les solutions de (E) sont les fonctions: $x \mapsto (C\,e^{2x} - 4)x = Cx\,e^{2x} - 4x$ où $C \in \mathbb{R}$.

3. Existe-t-il une fonction f solution de l'équation différentielle (E) dont la représentation graphique dans un repère donné passe par le point A(ln2 ; 0) ? Si oui la préciser.

Il suffit de résoudre l'équation d'inconnue C, $0 = C \ln 2\, e^{2\ln 2} - 4 \ln 2$

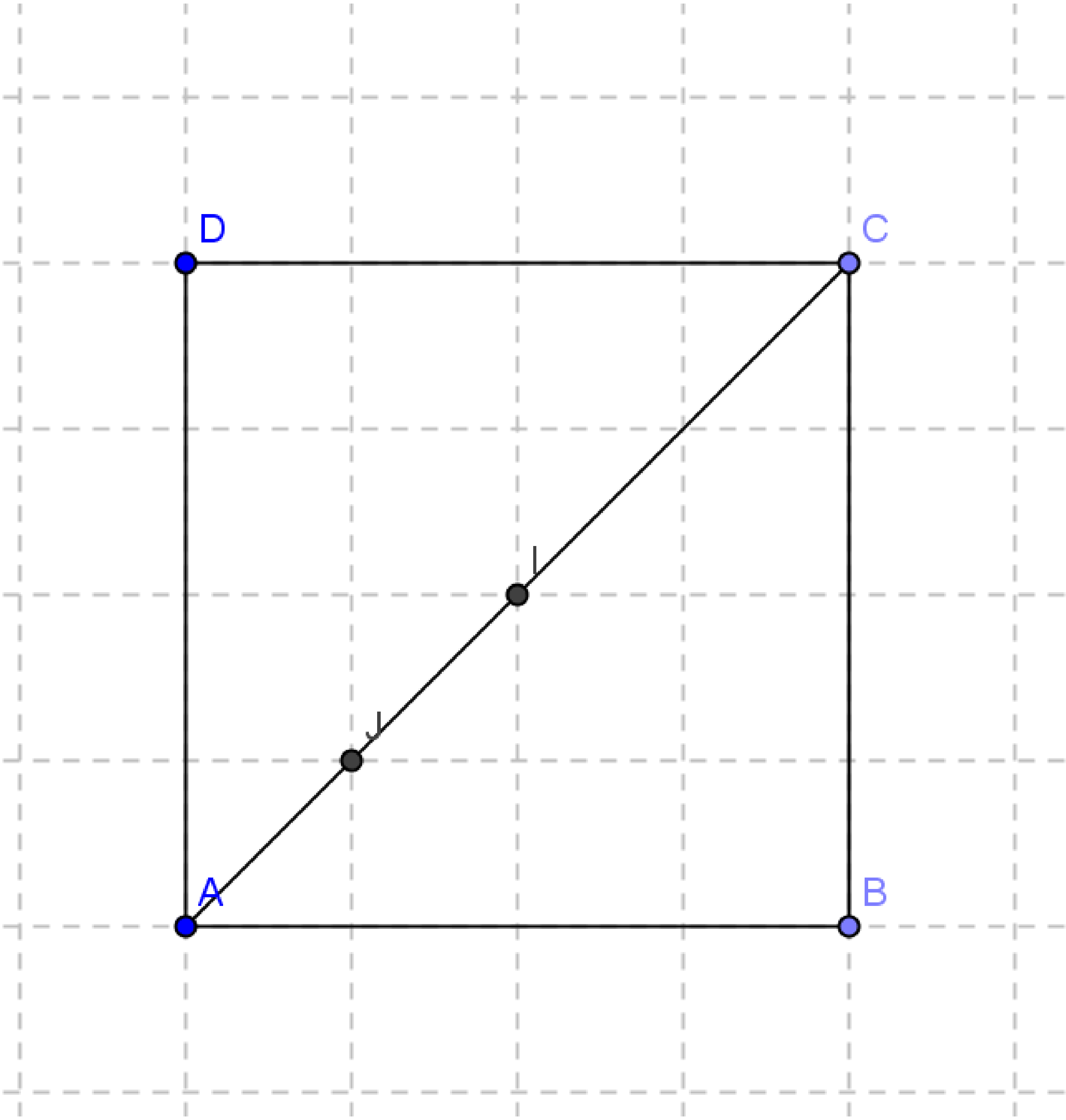
Comme $e^{2\ln 2} = e^{\ln 4} = 4$, on a: $C = 1$

Il existe donc une fonction f dont la représentation graphique dans un repère donné passe par le point A(ln2 ; 0) (c'est-à-dire: la solution de (E) qui s'annule en ln2), c'est la fonction: $x \mapsto x\ \mathrm{e}^{2x} - 4x$

EXERCICE 3 ***4 points*** ***Commun à tous les candidats***

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).
Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, la lettre correspondant à la réponse choisie. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

Dans le plan orienté, ABCD est un carré direct ($(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$). On note I son centre et J le milieu de [AI].



1. C est le barycentre des points pondérés (A,m), (B, 1) et (D, 1) lorsque :

a. $m = -2$ b. $m = 2$ c. $m = -1$ d. $m = 3$

Il faut $m\ \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 0$
Or, $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}$ (règle du parallélogramme)
Réponse: $m = -1$

2. a. B est l'image de C par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$. FAUX, l'angle vaut $-\frac{\pi}{2}$

b. Le rapport de l'homothétie de centre C qui transforme I en J est $\frac{2}{3}$. FAUX: $\overrightarrow{CJ} = \frac{3}{2}\ \overrightarrow{CI}$ (Le rapport est $\frac{3}{2}$)

c. Le triangle DAB est invariant par la symétrie de centre I. FAUX car l'image de A est C. (DAB a pour image BCD)

d. J est l'image de I par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\ \overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\ \overrightarrow{DB}$.

VRAI: $\frac{1}{2}\ \overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\ \overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}(\ \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}\ ) = \frac{1}{4}\ \overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\ \overrightarrow{DA} = \frac{1}{4}(\ \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}\ ) = \frac{1}{4}\ \overrightarrow{CA}$

Or, $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{4}\ \overrightarrow{CA}$ par construction

3. L'ensemble des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\| = AB$.

Comme $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\ \overrightarrow{MI}$, on cherche l'ensemble des points M tels que MI = $\frac{AB}{2}$

Cercle de centre I et de rayon $\frac{AB}{2}$

a. la médiatrice de [AC]. FAUX
b. le cercle circonscrit au carré ABCD. FAUX
c. la médiatrice de [AI]. FAUX
d. le cercle inscrit dans le carré ABCD. VRAI

4. L'ensemble des points M du plan tels que : $(2\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}).(\ \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\ ) = 0$ est:
D'après Chasles: $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA}$
Le barycentre de (A,2), (B,1), (D,1) est celui de (A,2), (I,2) (Théorème du barycentre partiel ou d'associativité) donc, le milieu de [AI], donc J.
On a donc: $2\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = 4\ \overrightarrow{MJ}$
On cherche alors: $4\ \overrightarrow{MJ}\cdot\overrightarrow{CA} = 0$
L'ensemble des points M est la droite perpendiculaire à [AC] passant par J.
a. la médiatrice de [AC]. FAUX
b. le cercle circonscrit au carré ABCD. FAUX
c. la médiatrice de [AI]. VRAI
d. le cercle inscrit dans le carré ABCD. FAUX

EXERCICE 4 4 points Commun à tous les candidats

On considère la suite numérique (J_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par $J_n = \int_1^n e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt$

1. Démontrer que la suite (J_n) est croissante.

$J_{n+1} - J_n = \int_n^{n+1} e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt$ d'après Chasles et comme $t \mapsto e^{-t}\sqrt{1+t}$ est une fonction positive sur $[n;\ n+1]$, l'intégrale est positive.

$J_{n+1} - J_n \geqslant 0$ prouve que la suite (J_n) est croissante.

2. Dans cette question, le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.

On définit la suite (I_n), pour tout entier naturel n non nul, par : $I_n = \int_1^n (t+1)e^{-t}\,dt$

a. Justifier que, pour tout $t \geqslant 1$, on a : $\sqrt{t+1} \leqslant t+1$
Les nombres étant positifs, l'ordre des nombres est le m^me que celui de leur carré.
On peut donc comparer $t+1$ et $(t+1)^2$
On sait (ou on re-démontre) que lorsque $x \geqslant 1$, $x \leqslant x^2$
$t \geqslant 1$ implique $t+1 \geqslant 2$.
On a donc: $t+1 \leqslant (t+1)^2$, soit: pour tout $t \geqslant 1$, on a : $\sqrt{t+1} \leqslant t+1$

b. En déduire que $J_n \leqslant I_n$.
En multipliant par e^{-t} , les deux membres de l'inégalité du 2a), il vient:
$e^{-t}\ \sqrt{t+1} \leqslant e^{-t}(t+1)$
L'intégration sur $[1; n]$ ($n \geqslant 1$) conserve l'ordre, d'où, $J_n \leqslant I_n$.

c. Calculer I_n en fonction de n. En déduire que la suite (J_n) est majorée par un nombre réel (indépendant de n).
Par une intégration par parties ... $\begin{cases} u(t)=t+1 \\ v'(t)=e^{-t} \end{cases}$ *et* $\begin{cases} u'(t)=1 \\ v(t)=-e^{-t} \end{cases}$

$I_n = \left[(t+1)\times(-e^{-t})\right]_1^n - \int_1^n 1\times(-e^{-t})\,dt = -(n+1)\ e^{-n} - 2\times(-e^{-1}) + \int_1^n e^{-t}\,dt = \frac{2}{e} - \frac{n+1}{e^n} + \left[-e^{-t}\right]_1^n = ...$

$I_n = \frac{3}{e} - \frac{n+2}{e^n}$

Comme $\frac{n+2}{e^n} > 0$, on a: $\frac{3}{e} - \frac{n+2}{e^n} < \frac{3}{e}$.

Finalement: $J_n \leqslant I_n \leqslant \frac{3}{e}$

d. Que peut-on en conclure pour la suite (J_n) ?
La suite (J_n) est croissante et majorée, donc, la suite (J_n) est convergente.
(Sa limite est inférieure ou égale à $\frac{3}{e}$, mais, elle n'est pas déterminée dans cet exercice)

EXERCICE 5 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On réalisera une figure en prenant 2 cm comme unité graphique sur chaque axe.
On considère les points A, B et I d'affixes respectives $z_A = 1$, $z_B = 5$ et $z_I = 3 + i$.
On note $(\mathscr{C})$ le cercle de centre O et de rayon 1, (Δ) la médiatrice de [AB] et (T) la tangente au cercle $(\mathscr{C})$ en A.
À tout point M d'affixe z, différent de A, on associe le point M′ d'affixe z' telle que : $z' = \frac{z-5}{z-1}$.
Le point M′ est appelé l'image de M.

Partie A

1. Déterminer sous forme algébrique l'affixe du point I′ image de I.
Vérifier que I′ appartient à $(\mathscr{C})$.

L'affixe $z_{I'} = \dfrac{3+1-5}{3+i-1} = \dfrac{-2+i}{2+i} = \dfrac{(-2+i)(2-i)}{5} = -\dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i$

Comme $|z_{I'}| = \sqrt{\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2+\left(\dfrac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{9}{25}+\dfrac{16}{25}} = 1$, le point I′ appartient à ($\mathscr{C}$).

2. a. Justifier que pour tout point M distinct de A et B, on a : OM′ = $\dfrac{MB}{MA}$

OM′ = $|z'| = \left|\dfrac{z-5}{z-1}\right| = \dfrac{|z-5|}{|z-1|}$

Or, z – 5 est l'affixe de $\overrightarrow{BM}$ et z –+ 1 est celle de $\overrightarrow{AM}$, d'où, $|z-5|$ = BM = MB et $|z-1|$ = AM = MA

On a bien: OM′ = $\dfrac{MB}{MA}$

b. Justifier que pour tout point M distinct de A et B, on a : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$.

arg(z') = $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'})$. Or, $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, d'où, arg($z'$) = $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'})$

D'autre part: arg(z') = $\arg\left(\dfrac{z-5}{z-1}\right)$ = arg(z – 5) – arg(z – 1) = $(\vec{u}, \overrightarrow{BM}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})$

Or, $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$

on a bien : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$.

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Dans la suite de l'exercice, M désigne un point quelconque de (Δ). On cherche à construire géométriquement son image M′.

1. Démontrer que M′ appartient à ($\mathscr{C}$).

M appartient à la médiatrice de [AB], donc, MA = MB, d'où, $\dfrac{MB}{MA} = 1$

D'après la partie A/ 2a), OM′ = 1.

Ce qui prouve que M′ appartient à ($\mathscr{C}$).

2. On note (d) la droite symétrique de la droite (AM) par rapport à la tangente (T). (d) recoupe (C) en N.

a. Justifier que les triangles AMB et AON sont isocèles.

M appartient à la médiatrice de [AB], donc, MAB est isocèle en M.

A et N sont deux points du cercle de centre O, donc, AON est isocèle en O.

Après avoir justifié que $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AN}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB})$

Une symétrie change un angle orienté en son opposé;

L'image de la demi-droite [AB) est [AO) et celle de la demi-droite [AM) est [AN), d'où

$(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AN}) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB})$

Les angles sont égaux (Posons α une mesure de ces angles).

démontrer que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$

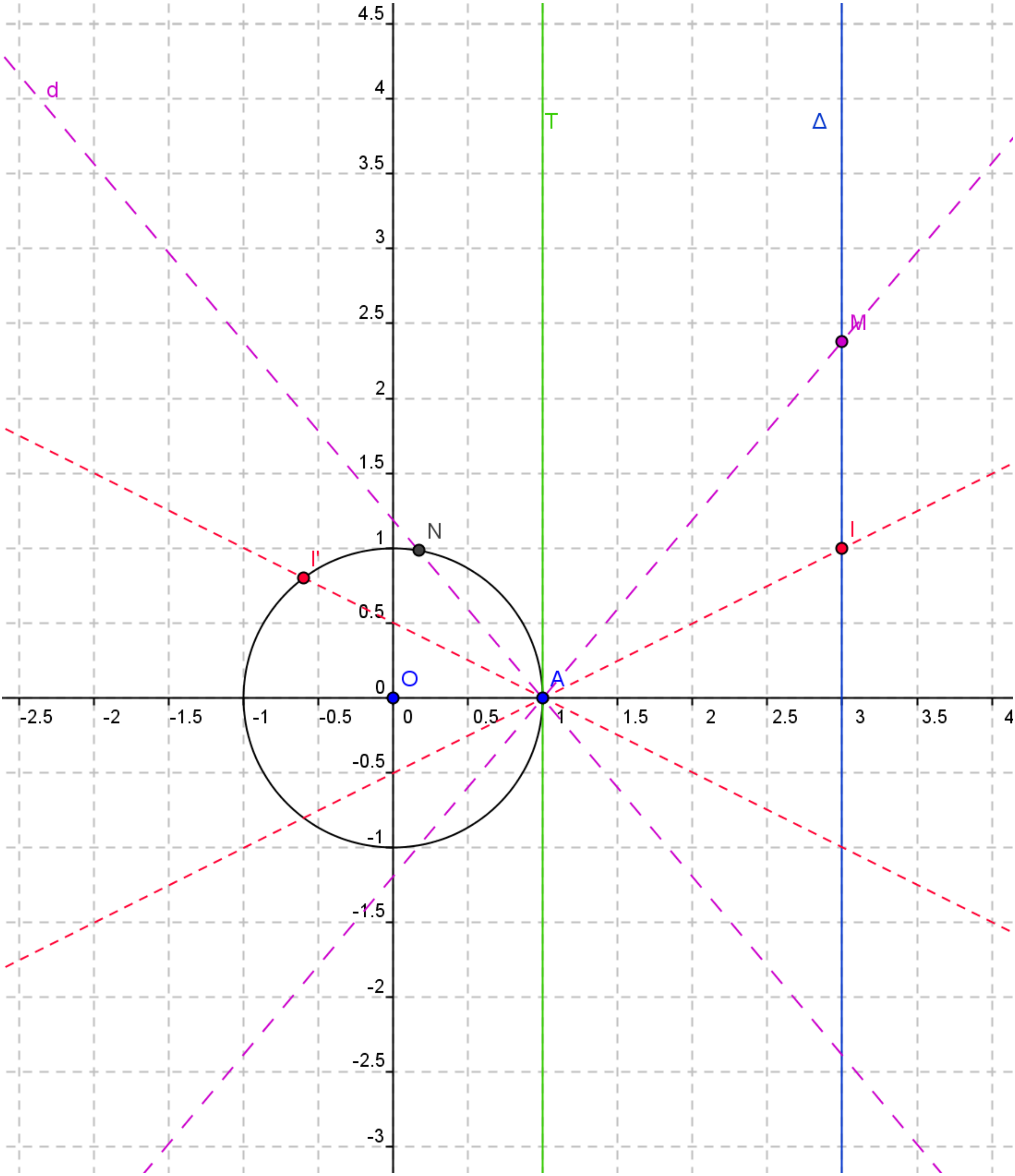
Dans le triangle isocèle OAN, on a: $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}) = \pi - 2\times(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AO}) = \pi - 2(-\alpha)$

Dans le triangle isocèle MAB, on a: $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \pi - 2\times(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = \pi - 2(-\alpha)$

D'après l'égalité précédente, la deuxième égalité est prouvée.

b. En déduire une construction de M′.

D'après la partie A/2b), le point N est le point M′ puisque c'est le point de ($\mathscr{C}$) vérifiant l'égalité d'angles.


d
T
Δ
M
N
I
I'
O
A
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4