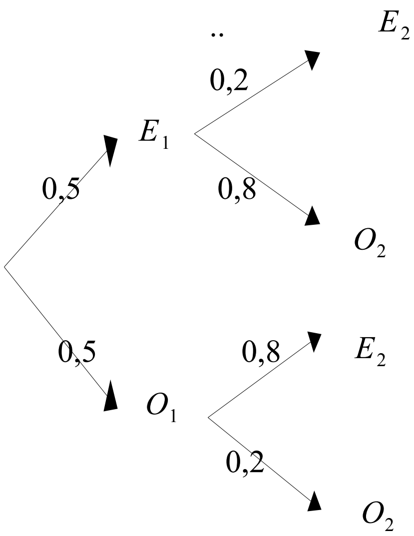
Table des matières

France septembre 2006

Partie A.



On a donc: P($E_1 \cap E_2$) = 0,5×0,2 = 0,1

2) Énoncé: P(E_1) = 0,5; $P_{E_1}(O_2)$ = 0,8,

calcul: P($E_1 \cap E_2$) = P(E_1)× $P_{E_1}(E_2)$ = 0,5×0,2 = 0,1

3) On cherche: P($E_1 \cap E_2$) + P($O_1 \cap O_2$) = ... = 0,2

Partie B

1) Un succès: le touriste est sur la plage à l'Est

Un échec: le touriste n'est pas sur la plage à l'Est.

n touristes qui choisissent **indépendamment** les uns des autres.

Les conditions de la loi binomiale $\mathscr{B}$(n, $\frac{1}{2}$) sont réunies, d'où,

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \frac{1}{2}^k \frac{1}{2}^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}$$

2 a) Étant donné qu'il y a au moins trois touristes et qu'il n'y a que deux plages, il y a nécessairement au moins deux touristes sur une des plages.

Il ne peut donc y avoir deux touristes *heureux (je ne suis pas responsable de ce vocabulaire ....)*

2b) Il y a un touriste heureux dans seulement deux cas **disjoints** (ou incompatibles).

Un touriste à l'Est et $n-1$ touristes à l'Ouest ou Un touriste à l'Ouest et $n-1$ touristes à l'Est

On a donc:

P("un heureux") = P($X = 1$) + P($X = n-1$) = $\binom{n}{1}\frac{1}{2^n} + \binom{n}{n-1}\frac{1}{2^n} = n\frac{1}{2^n} + n\frac{1}{2^n} = \frac{2n}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}}$

c) Si $n = 10$, on a: $\frac{10}{2^9} = \frac{10}{512} = \frac{20}{1024} \approx 0{,}02$ au centième près.

Antilles-Guyanne septembre 2006

Partie A

C'est un R.O.C.

$P(X > t) = 1 - P(X \leqslant t) = 1 - \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = 1 - \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 + \left[\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^t = ... = \mathrm{e}^{-\lambda t}$

$$P_{(X>t)}(X>s+t) = \frac{P((X>s)\cap(X>s+t))}{P(X>t)}$$

Or, les éléments encore envie à $s+t$ étaient déjà en vie à la date t, c'est-à-dire: $(X > s+t) \subset (X > t)$

Ce qui donne: $(X > s+t) \cap (X > t) = (X > s+t)$

On a alors: $P_{(X>t)}(X>s+t) = \frac{P((X>s)\cap(X>s+t))}{P(X>t)} = \frac{P(X>s+t)}{P(X>t)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(s+t)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} = ... = \mathrm{e}^{-\lambda s} = P(X > s)$

(Ce qui justifie "sans vieillissement" dans l'intitulé de la loi.)

Partie B

1 a) $P(T \leqslant 10) = 0{,}7 \Leftrightarrow \int_0^{10} \lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 0{,}7$ (ou $P(T > 10) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$ et on applique la partie *A*)

$\left[-e^{-\lambda t}\right]_0^{10} = 0{,}7$, soit: $1 - \mathrm{e}^{-10\lambda} = 0{,}7$

On résout: $\mathrm{e}^{-10\lambda} = 0{,}3 \Leftrightarrow -10\lambda = \ln 0{,}3 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln 0{,}3}{10} \approx 0{,}1203$ ...

On prend maintenant: $\lambda \approx 0{,}12$

b) $P_{(T>10)}(T>15) = P(T > 5)$ d'après partie A

$P(T > 5) = \mathrm{e}^{-5\lambda}$ (une valeur approchée est: $\mathrm{e}^{-5\times 0{,}12} = \mathrm{e}^{-0{,}6} \approx 0{,}548\,8$ ...

On peut aussi faire: $P_{(T>10)}(T>15) = \frac{P((T>10)\cap(T>15))}{P(T>10)} = \frac{P(T>15)}{P(T>10)} = \frac{\mathrm{e}^{-15\lambda}}{0{,}3}$

ou encore = $\frac{\mathrm{e}^{-15\lambda}}{\mathrm{e}^{-10\lambda}} = \mathrm{e}^{-5\lambda}$

c) L'attente du client ne dépassera pas 15 minutes sachant qu'il a déjà attendu 5 minutes est $P(T \leqslant 5)$ d'après la partie A, et, donc, $1 - P(T > 5) = 1 - \mathrm{e}^{-5\lambda} \approx 0{,}45$ à 0,01 près.

2) a) D'après l'énoncé, Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0{,}3$

$\mathscr{B}(6; 0,3)$

b) L'ouverture de caisses supplémentaires aura lieu si les événements incompatibles suivants sont réalisés: $(Y = 4)$ ou $(Y = 5)$ ou $(Y = 6)$

On cherche donc: $P(Y=4) + P(Y = 5) + P(Y = 6) = \binom{6}{4}\ 0,3^4 \times 0,7^2 + \binom{6}{5}\ 0,3^5 \times 0,7 + \binom{6}{6}\ 0,3^6$

$= 15\times\ 0,3^4 \times\ 0,7^2 + 6\times\ 0,3^5 \times 0,7 +\ 0,3^6 \approx 0,07$ à un centième près.