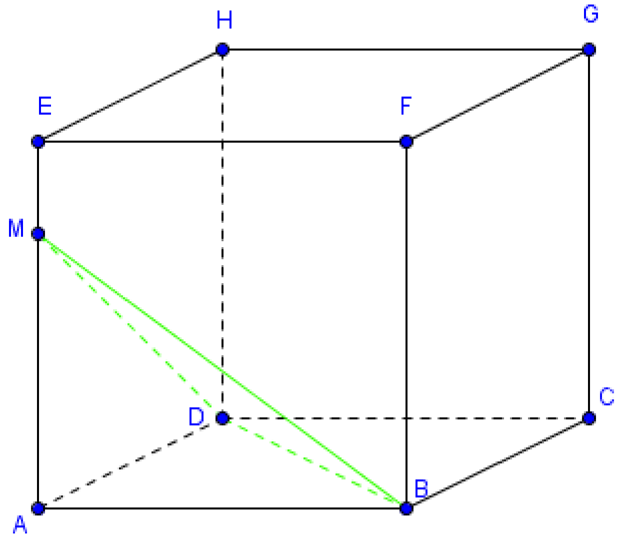
On considère un cube *ABCDEFGH* d'arête 1.



Le nombre a désigne un réel strictement positif.

On considère le point M de la demi-droite $[AE)$ défini par $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AE}$.

(Voir une méthode en choisissant un repère orthonormal à la fin de l'exercice)

1- Déterminer le volume du tétraèdre *ABDM* en fonction de a.

$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B}\times h$ où $\mathcal{B}$ est l'aire de la base et h la hauteur du tétraèdre.

Ici: $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \frac{BA \times BD}{2} \times AM = \frac{1}{6a}$

2. Soit K le barycentre du système de points pondérés : $\{(M; a^2), (B; 1), (D; 1)\}$.

a. Exprimer $\overrightarrow{BK}$ en fonction de $\overrightarrow{BM}$ et de $\overrightarrow{BD}$.

$a^2\,\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{DK} = \vec{0}$ équivaut à

$a^2(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BK}) + \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BK} = \vec{0}$ équivaut à

$(a^2 + 2)\,\overrightarrow{BK} = a^2\,\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BD}$

Puisque $a^2 + 2 \neq 0$, on a : $\overrightarrow{BK} = \frac{a^2}{a^2+2}\overrightarrow{BM} + \frac{1}{a^2+2}\overrightarrow{BD}$.

On en déduit que K est un point du plan (BDM) puisque $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont deux vecteurs directeurs de ce plan.

Comme $0 < \frac{a^2}{a^2+2} < 1$ et $0 < \frac{1}{a^2+2} < 1$ alors K est à l'intérieur du triangle *BDM*.

b. Calculer $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AD}$.

D'après 2a/, $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AM} = \frac{a^2}{a^2+2}\overrightarrow{BM}\,.\,\overrightarrow{AM} + \frac{1}{a^2+2}\overrightarrow{BD}\,.\,\overrightarrow{AM}$

Or, $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}).\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AM}^2 = 0 + \frac{1}{a^2}$

et $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AM} = 0$ **(La droite (AM) étant orthogonale au plan (ABD) est orthogonale à toute droite du plan, d'où, (AM) est orthogonale à (BD))**

$\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AM} = \dfrac{a^2}{a^2+2}\times\dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{a^2+2}$

D'après 2a/, $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AD} = \dfrac{a^2}{a^2+2}\ \overrightarrow{BM}\ .\ \overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{a^2+2}\ \overrightarrow{BD}\ .\ \overrightarrow{AD}$

Or, $\overrightarrow{BM}\ .\ \overrightarrow{AD} = 0$ **(La droite (*AD*) étant orthogonale au plan (*ABE*) est orthogonale à toute droite du plan, d'où, (*AD*) est orthogonale à (*BM*))**

et $\overrightarrow{BD}\ .\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}^2 = 1$

$\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{a^2+2}$

On a alors : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AD}$

Comme $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BK}\ (\ \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM}\ ) = \overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AM} = 0$

c. Démontrer l'égalité $\overrightarrow{DK}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$

$\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0 - 1 = -1$

$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DB} = 2$

$\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{MD} = 0$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{DB} &= \frac{a^2}{a^2+2}\ \overrightarrow{BM}\ .\ \overrightarrow{DB} + \frac{1}{a^2+2}\ \overrightarrow{BD}\ .\ \overrightarrow{DB}\\ &= \frac{a^2}{a^2+2}\ (\ \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}\ )\ \overrightarrow{DB} - \frac{1}{a^2+2}\times 2\\ &= \frac{a^2}{a^2+2}\ (\ \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DB}\ ) - \frac{1}{a^2+2}\times 2 = -\frac{a^2}{a^2+2} - \frac{1}{a^2+2}\times 2 = -1\end{aligned}$$

Finalement :

$\overrightarrow{DK}\cdot\overrightarrow{MB} = -1 + 2 + 0 - 1 = 0$

d. Démontrer que K est l'orthocentre du triangle BDM.

$\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{MD} = 0$, donc, la droite (BK) est perpendiculaire à (MD).

Par conséquent : (BK) est une hauteur du triangle BDM.

De même, $\overrightarrow{DK}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ implique :

(DK) est une hauteur du triangle BDM.

K étant le point d'intersection de deux hauteurs du triangle BDM est l'orthocentre de ce triangle.

3. Démontrer les égalités $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ et $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{MD} = 0$

Qu'en déduit-on pour la droite (AK) ?

$\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{MB} = (\ \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK}\ )\ \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{MB} + 0 = \overrightarrow{AD}\ .(\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\ ) = 0 + 0 = 0$

$\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{MD} = (\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK}\ )\ \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MD} + 0 = \overrightarrow{AB}\ .(\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}\ ) = 0 + 0 = 0$

La droite (AK) étant orthogonale à deux droites sécantes du plan (BDM) est orthogonale à ce plan.

Comme $K \in (AMD)$, AK est la hauteur du tétraèdre $AMBD$.

4. a. Montrer que le triangle BDM est isocèle et que son aire est égale à $\dfrac{\sqrt{a^2+2}}{2a}$ unité d'aire.

Dans le triangle BAM rectangle en A, on a : $BM^2 = BA^2 + AM^2 = 1 + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{a^2+1}{a^2}$

Dans le triangle DAM rectangle en A, on a : $DM^2 = DA^2 + AM^2 = 1 + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{a^2+1}{a^2}$

On obtient : $BM = DM$

Soit I le milieu de $[DB]$.

Le triangle BDM étant isocèle en M, la médiane $[MI]$ est aussi une hauteur de ce triangle.

$MI^2 = BM^2 - \dfrac{1}{4}BD^2 = 1 + \dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{4}\times 2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{a^2+2}{2a^2}$

Aire de BDM est : $\mathcal{A} = \dfrac{MI \times BD}{2} = \dfrac{\sqrt{a^2+2}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}a\times 2} = \dfrac{\sqrt{a^2+2}}{2a}$

b. Déterminer le réel a tel que l'aire du triangle BM soit égale à 1 unité d'aire. Déterminer la distance AK dans ce cas.

On résout : $\dfrac{\sqrt{a^2+2}}{2a} = 1$ qui équivaut à $\sqrt{a^2+2} = 2a$.

Comme $a > 0$, cette équation est équivalente à : $a^2 + 2 = 4a^2$

On en déduit : $a^2 = \dfrac{2}{3}$, puis $a = \sqrt{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

Comme AK est la hauteur relative à la base BDM du tétraèdre $ABDM$ de volume $\mathcal{V} = \dfrac{1}{6a}$ (Voir 1/)

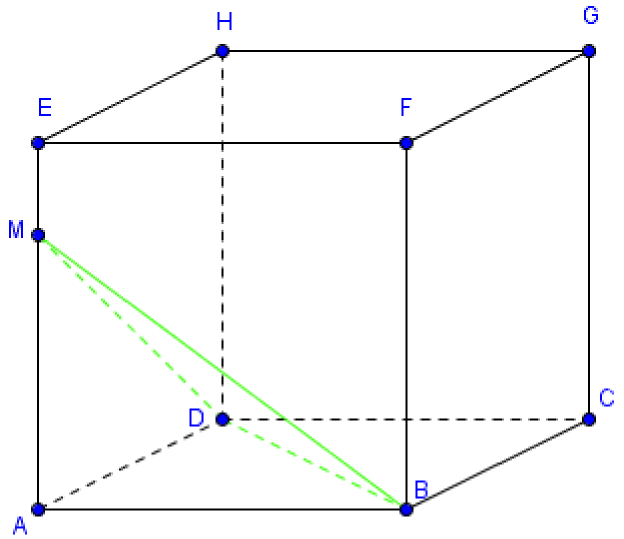
On a : $\dfrac{1}{6a} = \dfrac{1}{3}\times\mathcal{A}\times AK$.

$AK = \dfrac{1}{2a}\times\dfrac{2a}{\sqrt{a^2+2}} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+2}}$

Comme $a^2 = \dfrac{2}{3}$, on obtient : $AK = \sqrt{\dfrac{3}{8}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$

Avec un repère orthonormal

On choisit par exemple $(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$



On a donc : $B(1 ; 0 ; 0)$, $D(0 ; 1 ; 0)$ et $E(0 ; 0 ; 1)$, d'où $M(0 ; 0 ; \frac{1}{a})$

K étant le barycentre de

$$\begin{cases} x_K = \dfrac{0\times a^2+1\times 1+0\times 1}{a^2+1+1} \\ y_K = \dfrac{0\times a^2+0\times 1+1\times 1}{a^2+1+1} \\ z_K = \dfrac{\frac{1}{a}\times a^2+0\times 1+0\times 1}{a^2+1+1} \end{cases} \text{, soit, } \begin{cases} x_K = \dfrac{1}{a^2+2} \\ y_K = \dfrac{1}{a^2+2} \\ z_K = \dfrac{a}{a^2+2} \end{cases}$$

On a alors $\overrightarrow{BK} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a^2+2}-1 \\ \dfrac{1}{a^2+2} \\ \dfrac{a}{a^2+2} \end{pmatrix}$, soit, $\overrightarrow{BK} \begin{pmatrix} \dfrac{-a^2-1}{a^2+2} \\ \dfrac{1}{a^2+2} \\ \dfrac{a}{a^2+2} \end{pmatrix}$

Comme $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{a} \end{pmatrix}$, on obtient : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AM} = 0 + 0 + \dfrac{1}{a} \times \dfrac{a}{a^2+2} = \dfrac{1}{a^2+2}$

et $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 + 1\times \dfrac{1}{a^2+2} + 0\times \dfrac{a}{a^2+2} = \dfrac{1}{a^2+2}$

On a aussi $\overrightarrow{AK} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a^2+2} \\ \dfrac{1}{a^2+2} \\ \dfrac{a}{a^2+2} \end{pmatrix}$, d'où,

$$AK^2 = \left(\frac{1}{a^2+2}\right)^2 + \left(\frac{1}{a^2+2}\right)^2 + \left(\frac{a}{a^2+2}\right)^2 = \frac{1}{(a^2+2)^2}(2+a^2) = \frac{1}{a^2+2}$$