Exercice 3 4 points Commun à tous les candidats

1. Soit x un nombre réel positif ou nul et k un entier strictement supérieur à x.

a. Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier n supérieur ou égal à k, $\frac{k^n}{n!} \leqslant \frac{k^k}{k!}$.

Comme $n \geqslant k$, l'initialisation se fait pour $n = k$.

Initialisation: $n = k$ donne $\frac{k^k}{k!} \leqslant \frac{k^k}{k!}$ Ce qui est vrai

Hérédité: Soit **un** entier $n \geqslant k$ tel que $\frac{k^n}{n!} \leqslant \frac{k^k}{k!}$

Évaluons $\frac{k^{n+1}}{(n+1)!}$

$\frac{k^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{k}{n+1} \times \frac{k^n}{n!}$

Or $n + 1 \geqslant k$ (entiers strictement positifs), d'où, $0 < \frac{k}{n+1} \leqslant 1$

D'après l'hypothèse de récurrence: $\frac{k^n}{n!} \leqslant \frac{k^k}{k!}$

En multipliant membre-à-membre les deux inégalités de même sens de nombres positifs, il vient:

$\frac{k}{n+1} \times \frac{k^n}{n!} \leqslant \frac{k^k}{k!}$, soit: $\frac{k^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{k^k}{k!}$

Conclusion:

D'après l'axiome de récurrence: la propriété $\frac{k^n}{n!} \leqslant \frac{k^k}{k!}$ est vraie pour **tout** entier $n \geqslant k$.

b. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à k, $\frac{x^n}{n!} \leqslant \left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^k}{k!}$

Il suffit de remarquer que $\frac{x^n}{x^n} = 1$

D'après 2a), on a alors: $\frac{x^n}{x^n} \times \frac{k^n}{n!} \leqslant \frac{k^k}{k!}$.

En multipliant les deux membres de l'inégalité par $\left(\frac{x}{k}\right)^n$ (= $\frac{x^n}{k^n}$), et, en réorganisant,

$\frac{x^n}{k^n} \times \frac{x^n}{x^n} \times \frac{k^n}{n!} \leqslant \frac{k^k}{k!} \times \left(\frac{x}{k}\right)^n$, soit, $\frac{x^n}{n!} \leqslant \left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^k}{k!}$

c. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$

On sait; $k > x \geqslant 0$, d'où, $0 \leqslant \frac{x}{k} < 1$

On a alors: $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{x}{k}\right)^n = 0$

En multipliant par la constante $\frac{k^k}{k!}$, on a: $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^k}{k!} = 0$

Comme $0 \leqslant \frac{x^n}{n!} \leqslant \left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^k}{k!}$, on obtient d'après le théorème des gendarmes: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$

2) a. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\dfrac{n^{n-1}}{n!} \geqslant 1$.

(on pourra écrire $\dfrac{n^{n-1}}{n!}$ comme un produit de $n-1$ facteurs supérieurs ou égaux à 1).

$\dfrac{n^{n-1}}{n!} = \dfrac{n\times n\times\ldots\times n}{n\times(n-1)\times\ldots\times 2\times 1} = \dfrac{n}{n}\times\dfrac{n}{n-1}\times\ldots\times\dfrac{n}{2}\times\dfrac{n}{1}$ (Il y a $n-1$ facteurs n au numérateur)

Or, les facteurs $\dfrac{n}{k}$ avec $2 \leqslant k \leqslant n$ sont tous supérieurs ou égaux à 1), donc, le produit est supérieur ou égal à 1.

Conclusion: pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\dfrac{n^{n-1}}{n!} \geqslant 1$.

b. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^n}{n!} = +\infty$.

$\dfrac{n^n}{n!} = \dfrac{n^{n-1}}{n!}\times n$, d'où, d'après 2 a), $\dfrac{n^n}{n!} \geqslant n$.

Les théorèmes de comparaison mènent à: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^n}{n!} = +\infty$.

Exercice 4 Liban juin 2004

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+\ln 4+\dfrac{2}{e^x+1}$

(C) sa représentation graphique.

1) On a successivement: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x+1}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{e^x+1}=2$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

2) $f(x)+f(-x)=x+\ln 4+\dfrac{2}{e^x+1}+\left(-x+\ln 4+\dfrac{2}{e^{-x}+1}\right)=2\ln 4+\dfrac{2(e^{-x}+1+e^x+1)}{1+e^x+e^{-x}+1}=2(\ln 4+1)$

pour tout $x\in\mathbb{R}$, $-x\in\mathbb{R}$ et $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}=1+\ln 4$, d'où, le point $A(0;1+\ln 4)$ est centre de symétrie de (C)

3) f est la somme des fonctions $u: x\mapsto x+\ln 4$ et de $v: x\mapsto\dfrac{2}{e^x+1}$ dérivables sur $\mathbb{R}$, donc, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel, $f'(x)=1+\dfrac{-2e^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{e^{2x}+2e^x+1-2e^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}$

Puisque pour tout x réel, $f'(x)>0$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4 a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $\mathbb{R}$

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

donc, *f* réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]\lim_{x\to-\infty} f(x) ; \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[= \mathbb{R}$

Par conséquent, pour tout $m\in\mathbb{R}$, l'équation $f(x)=m$ admet donc une solution unique dans $\mathbb{R}$.

b) Soit $f(a)=3$ $f(1,1)\approx 2,98$ *à* 10^{-2} près et $f(1,2)\approx 3,04$ *à* 10^{-2} près

On a donc, $f(1,1)<f(a)<f(1,2)$ et comme *f* est strictement croissante $1,1<a<1,2$

c) Comme $f(a)+f(-a)=2+2\ln 4$ et $f(a)=3$, on a: $f(-a)=-1+2\ln 4$

5) a) $f(x)=x+\ln 4+\dfrac{2}{e^x+1}=x+\ln 4+\dfrac{2(e^x+1)-2e^x}{e^x+1}=x+\ln 4+2-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$

En $+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x+1}=0$, d'où, la droite Δ d'équation $y=x+\ln 4$ est asymptote à (C)

En $-\infty$, $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{2e^x}{e^x+1}=0$, d'où, la droite Δ' d'équation $y=x+2\ln 4$ est asymptote à (C)

De plus, le signe de $\dfrac{2}{e^x+1}$ étant toujours strictement positif, (C) est strictement au-dessus de Δ

Complément: (C) est strictement en-dessous de Δ', car, $\dfrac{-2e^x}{e^x+1}<0$

6 a) Soit α un réel positif. $I(\alpha)=\int_0^{\alpha}[f(x)-x-\ln 4]dx$

Comme $f(x)>x+\ln 4$, l'intégrale $I(\alpha)$ représente l'aire, en u.a., comprise entre Δ, (C) et les droites d'équation $x=0$ (axe des ordonnées) et $x=\alpha$

b) $f(x)-x-\ln 4=2-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$

Posons $u(x)=e^x+1$, d'où, $u'(x)=e^x$ et comme $e^x+1>0$, on en déduit qu'une primitive de $x\mapsto\dfrac{e^x}{e^x+1}$ est $x\mapsto\ln(e^x+1)$

$$I(\alpha)=\left[2x-2\ln(e^x+1)\right]_0^{\alpha}=2\alpha-2\ln(e^{\alpha}+1)-(0-2\ln 2)=2\left[\ln(e^{\alpha})-\ln(e^{\alpha}+1)+\ln 2\right]=2\ln\frac{2e^{\alpha}}{e^{\alpha}+1}$$

Propriétés utilisées: Pour tout *x* réel, $\ln(e^{x})=x$ et, pour tout $a>0$, tout $b>0$, $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$, $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$

c) $I(\alpha)=1\Leftrightarrow 2\ln\dfrac{2e^{\alpha}}{e^{\alpha}+1}=1\Leftrightarrow\ln\dfrac{2e^{\alpha}}{e^{\alpha}+1}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{2e^{\alpha}}{e^{\alpha}+1}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

On en tire: $e^{\alpha}(2-\sqrt{e})=\sqrt{e}$ $e^{\alpha}=\dfrac{\sqrt{e}}{2-\sqrt{e}}$ $\alpha=\ln\dfrac{\sqrt{e}}{2-\sqrt{e}}$ ou encore $\alpha=\dfrac{1}{2}-\ln(2-\sqrt{e})$

Une valeur approchée de α à 10^{-1} près est: $\alpha\approx 1,5$